**Eléments formels
pour la logique modifiée
et la théorie de l'évanouissement.**

Annexe n°1

Le calcul des propositions et sa modification
présentés comme une théorie
écrite dans un double systéme génératif.

Nous proposons ici la construction effective des langages objets dont les modalités de la vérité fait l'objet de notre commentaire. Il s'agit du langage L_2 et de la théorie T_2. Nous les modifions pour obtenir le langage L_3 et la théorie T_3. La modification est indiquée par des clauses supplémentaires venant s'ajouter aux précédentes. Ces clauses supplémentaires sont écrites en caractères italiques.

Première partie

1) Les premiers éléments des langages[1] L_2 et L_3.

Il y a des petites lettres dont la série est énumérable sans qu'il soit fixé de limite à cette énumération.

p, q, r, s, t...

Puis nous introduisons deux connecteurs primitifs plus un qui n'ont pas chacun le même nombre d'arguments.

Une négation classique elle est unaires, ceci indique qu'elles portent sur une seule lettre,

elle s'écrit $\neg$ nous la lisons : il est faux.

La disjonction est binaire, elle porte donc de manière non simple sur deux lettres,

elle s'écrit $\vee$ nous la lisons : ou.

L3 *Une autre négation, dite modifiée,*

elle s'écrit $\sim$ *nous la lisons : non*

Enfin il y a les parenthèses (et).

Ces éléments étant donnés, proposons des définitions pour leur usage.

Nous appellerons énoncés bien formés ou formules certaines expressions construites avec les caractères présentés jusqu'ici. Ces formules respectent des principes formatifs Ces principes sont formulés dans le métalangage.

2) Les premiers éléments spécifiques de l'étage suivant de cette description, le métalangage L_{3+1}

[1] Les clauses courrantes, en écriture droite, définissent **L_2**. Les clauses écrites en *italique* concernent exclusivement **L_3** et sont signalées par son sigle : ***L3***

Il répète le premier mouvement en ce qui concerne sa partie spécifique et il contiennent la langue française dans cette version du calcul enfin ce métalangage est nécessaire à l'écriture des principes formatifs qui disent comment écrire les énoncés bien formés. Il nous servira aussi à écrire les principes déductifs qui diront comment déduire les thèses des théories T_2.et T_3

Nous aurons recours à des grandes lettres dans L_{3+1}, pour noter les énoncés bien formés, ces énoncés sont dits aussi les formules des langages L_2 et L_3 Ces lettres majuscules sont également énumérables aussi loin que l'on voudra, nous disons qu'elles sont dénombrables.

S, S', S", S"',....

3) Nous écrivons avec les éléments précédents les principes d'une bonne écriture des éléments premiers.

Donnons maintenant les principes formatifs de nos langages, ils sont au nombre de trois plus un.

(pf 0) Les lettres minuscules[2] sont des formules.
(pf 1) Si S est une formule, ¬ S est une formule.
(pf 2) Si S et S' sont des formules, (S ∨ S') est une formule.

(pfm 1') Si S *est une formule,* ~ S *est une formule.*

Parmi les formules S du langage L_3 nous pouvons spécifier les formules du langage L_2 qui en font partie, ce sont celles qui ne présentent aucune occurrence de la négation modifiée. Il nous arrivera de noter les formule de L_2 par les lettres P, P', P", P"',... nous parlerons alors du métalangage L_{2+1} en place de L_{3+1} .Si nous choisissons de nous placer dans L_{3+1} nous parlerons alors de la transcription propre de L_2 il s'agira de l'écriture de ses propres formules dans L_3 puisqu'elles en font partie.

Nous définissons des abréviations strictes de ces langages qui visent à alléger les écritures dans L_2 et L_3.

Grâce à trois nouveaux connecteurs binaires, nous remplacerons les formules qui définissent ces connecteurs abréviateurs par les expressions plus simples qui les utilisent.

La conjonction $p \wedge q \underset{def}{=} \neg ((\neg p) \vee (\neg q))$.

2 - Il faut bien faire la différence entre langage objet et métalangage surtout ici où nous allons construire un langage L_3 que nous intégrons au métalangage d'un dupliquât L_{3-1} de la logique canonique classique L_2. Cette construction nécessite un métalangage L_{3+1}. Si nous considérons les langages L_2, L_{2+1}, L_3, L_{3+1}, il y a deux type de grandes lettres. Et nous disons d'une grande lettre de L_{2+1} que c'est une formule de L_2, et d'une lettre de L_{3+1} que c'est une formule de L_3.

L'implication $\quad p \Rightarrow q \ \underset{\text{def}}{=} \ ((\neg p) \vee q).$

L'équivalence $\quad p \Leftrightarrow q \ \underset{\text{def}}{=} \ ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)).$

Il y a un nouveau connecteur unaire dans la logique modifiée
La négation modifiée duale $\quad \overline{p} \ \underset{\text{def}}{=} \ (\neg p \wedge \neg \sim p)$

Nous disposons maintenant de quatre connecteurs binaires. Chacun de ces connecteurs binaires peut être nié de manière classique. Nous les pourvoyons d'une barre seulement dans le cas de la négation classique, ils en donnent ainsi quatre autres : $\not\wedge, \not\vee, \not\Rightarrow, \not\Leftrightarrow$

Mais dans L3 *nous disposons de trois connecteurs unaires, ceux sont des négations.*

Donnons un autre caractère abréviateur unaire de la logique modifiée

$$\vdash p \ \underset{\text{def}}{=} \ (p \Leftrightarrow \sim \overline{p})$$

et deux autres caractères abréviateurs binaires de cette logique modifiée

$$(p \vdash\!\dashv q) \ \underset{\text{def}}{=} \ \vdash (\sim\sim (p \Leftrightarrow q) \vee \overline{(p \Leftrightarrow q)})$$

$$(p \blacktriangleright\!\!- q) \ \underset{\text{def}}{=} \ \vdash (\sim\sim (p \Rightarrow q) \vee \overline{(p \Rightarrow q)})$$

Nous introduirons le cas échéant d'autres caractères abrégés, lors d'études particulières, au cas par cas, afin d'alléger les écritures et faire mieux ressortir les isomorphismes entre les structures syntaxiques des énoncés.

Il n'y a pas de difficulté à considérer que les expressions abrégées au sens strict sont encore des formules.

Deuxième partie

Nous devons passer à la deuxième étape sans laquelle nous ne saurions parler de logique mathématique.

Il s'agit d'un second système formel qui est d'un ordre différent de ce qui précède, il s'agit de donner une version purement syntaxique, nous la dirons déductive, de la sémantique de ce langage. Cela se peut dans un calcul qui ressemble à une déduction, à moins que ce ne soit le contraire, la déduction intuitive étant reconnue comme un calcul.

4) Les éléments suivants du métalangage L3+1

Nous introduisons un nouveau caractère dans les métalangages L3+1

Nous ajoutons un caractère qui portent sur les formules du premier registre L2 ou L3, elle sont écrite en lettres majuscules. Ce caractère porte donc sur les grandes lettres dans le second registre L3+1 et concerne la déduction que nous donnons de certaines de ces expressions afin d'isoler les formules nécessairement vraies ou lois logiques, nous les appellerons les thèses de T_2 ou de T_3 Nous faisons à partir d'ici un large usage des lettres majuscules.

Le caractère de L_{3+1} : $\vdash$.
qui écrit dans L_{3+1} que la formule S est une thèse de T_3 : $\vdash$S

<u>Nous définissons un second caractère</u> propre au métalangages L_{3+1}.
L'équivalence déductible ou valide dans L_{3+1} : $\vdash\!\dashv$ qui indique que l'expression bien formée (S $\Leftrightarrow$ S') est une thèse de T_3 : S $\vdash\!\dashv$ S'. Avec le caractère précédent nous pourrions facilement faire l'économie de celui-ci en écrivant à la placel'expression $\vdash$(S $\Leftrightarrow$ S') qui écrit très bien l'équivalence en question.

<u>Nous définissons un troisiéme caractère</u> propre au métalangages L_{3+1}.
L'implication déductible ou valide dans L_{3+1} : $\vdash\!\!-$ qui indique que l'expression bien formée (S $\Rightarrow$ S') est une thèse de T_3 : S $\vdash\!\!-$ S'. Avec le caractère précédent nous pourrions facilement faire l'économie de celui-ci en écrivant à la place l'expression $\vdash$(S $\Rightarrow$ S') qui écrit très bien l'équivalence en question.

Lorsque nous décidons de nous placer résolument dans le langage L_3 comme métalangage L_{2+1} de L_2 nous pourrions employer les trois caractères $\vdash$, $\vdash\!\dashv$ et $\vdash\!\!-$ en place de ceux qui viennent d'être introduits dans L_{3+1} mais nous ne le ferons pas pour l'instant. Nous faisons un autre usage de ces trois caractères en les ayant construit explicitement dans L_3 en tant que caractères abréviateurs.

Il nous reste à articuler entre eux ces éléments encore éparses.

5) Nous écrivons avec les éléments précédents les principes de raisonnement corrects d'entre les thèses.

Nous formulons pour cela des principes de déductions et des axiomes qui permettent de déduire les thèses à partir de ces axiomes.

Il s'agit du second système formel dont nous parlions en présentant cette construction. Les axiomes sont les premières thèses génératrices des autres thèses, ils visent à n'écrire que des thèses produites selon les deux principes de déductions.
Grâce à ces principes nous pouvons établir d'autres formules qui ont valeur de thèses. Ces principes s'écrivent aussi dans le métalangage.

Les principes de déductions sont au nombre de deux, ils sont les même en logique classique et en logique modifiée

(pd 1) Le modus ponens: si $\vdash$.S et si $\vdash$.(S $\Rightarrow$ S') alors $\vdash$.S'

(pd 2) La substitution : si $\vdash$.S alors $\vdash$.(S' | p) S,
o∧ (S' | p) S. est la formule obtenue en remplaçant dans S toute les occurrences d'une même lettre p de cette expression par une même formule. S'

Il faut souligner la différence entre les modes d'engendrement des thèses selon ces deux principes.

— L'un détache une thèse à partir de deux thèses, certains l'appellent principe de détachement.

— L'autre produit une thèse à partir d'une seule thèse, prise comme un schéma ou un moule syntaxique, il substitue des lettres par d'autres formules quelconques, à condition que celles-ci soient des formules, c'est à dire des énoncés bien formés.

6) Les thèses génératrices de T_2 puis de T_3 ou les axiomes.

Nous pouvons maintenant formuler les axiomes de nos deux logiques

Il y a quatre axiomes pour T_2 :

(lc 1) $\vdash ((p \vee p) \Rightarrow p)$

(lc 2) $\vdash (p \Rightarrow (p \vee q))$

(lc 3) $\vdash ((p \vee q) \Rightarrow (q \vee p))$

(lc 4) $\vdash ((p \Rightarrow q) \Rightarrow ((r \vee p) \Rightarrow (r \vee q)))$

Il y a un axiome supplémentaire pour T_3 :

(lm 5) $\vdash (\sim p \Rightarrow (\sim q \Leftrightarrow \neg q))$

Les axiomes sont donc au nombre de cinq pour cette théorie.

(lm i) =(lc i) *lorsque i= 1 à 4 augmentés de (lm 5).*

Avec cette dernière précision nous disposons de manière exhaustive des éléments nécessaires à nos deux constructions et leur description est ainsi terminée. Il reste à s'en servir.

Troisième partie

Précisons à quel titre un double système formel est consistant, à quel titre il est complet. Le traitement de ces questions est encore rédigé dans le métalangage..

Consistance :

Un système axiomatique est consistant si et seulement si il respecte l'une de ces trois conditions:

1- Aucune thèse n'est la négation d'une autre thèse.

2- Il n'y a pas d'énoncé bien formé réduit à une simple variable propositionnelle qui soit une thèse.

3- Tout énoncé bien formé n'est pas une thèse (ou les énoncés bien formés ne sont pas tous des thèses).

Complétude :

Un système axiomatique est fortement complet si et seulement si ajouter d'autres thèses le rend inconsistant.

Il y a donc trois critère plus ou moins fort de complétude selon la consistance recherchée.

Le véritable travail de logicien consiste en premier lieu à démontrer que le langage objet L_2 avec sa théorie T_2 est consistant et complet.

Puis démontrer la consistance du langage objet L_3 muni de sa théorie T_3, alors que celle-ci n'est pas complète selon les critères énoncés ci-dessus.

Annexe n°2

Articulation de la syntaxe de L_2 et L_3

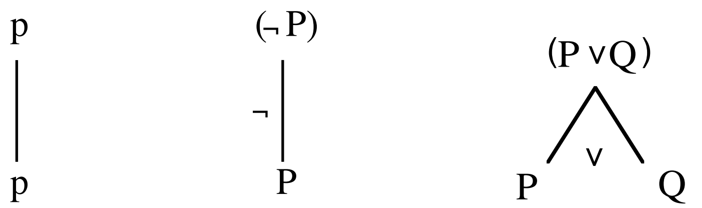
Des principes formatifs, il ressort un mode de production des formules. Nous pouvons décomposer ce lien dans une présentation graphique en termes d'arbres.

1) Analyse de chaque formule par un arbre

Il y a, dans le langage de la logique, un premier système formel purement grammatical o∧ sont donnés les termes primitifs et les principes de formations des énoncés. Ceci nous conduit à la notion d'énoncés bien formés ou formules de notre langage objet.

Les principes formatifs peuvent être transcrits en cellules élémentaires de graphes. En composant ces cellules élémentaires, nous formons des arbres, afin de simuler la production des formules et du même geste obtenir une analyse syntaxique de ces formules. Cette analyse nous servira par la suite

Reprenons les trois principes formatifs du calcul canonique classique des propositions et traduisons ces principes par des portions de graphes afin de décrire les formules par un arbre[3].



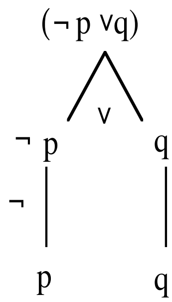
pf 0 - Les lettres minuscules sont des formules

pf 1 - Si P est une formule, (¬ P) est une formule.

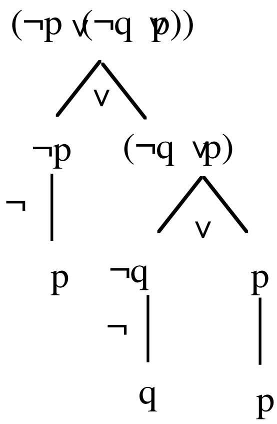
pf 2 - Si P et Q sont des formules, (P ∨ Q) est une formule.

Prenons un exemple afin de nous exercer à la composition de ces arbres syntaxiques. Soit (¬p∨q)

[3] - Un arbre est un graphe connexe dont il suffit de retirer une arête pour qu'il devienne non connexe. Autrement dit, il n'y a pas de cycle dans un arbre.



Et un autre exemple plus long. Soit (¬p∨(¬q∨p))



Nous constatons que l'extrémité de chaque branches d'un tel arbre est occupée par une simple lettre minuscule, puisque nous devons veillé à poursuivre l'analyse jusque là.

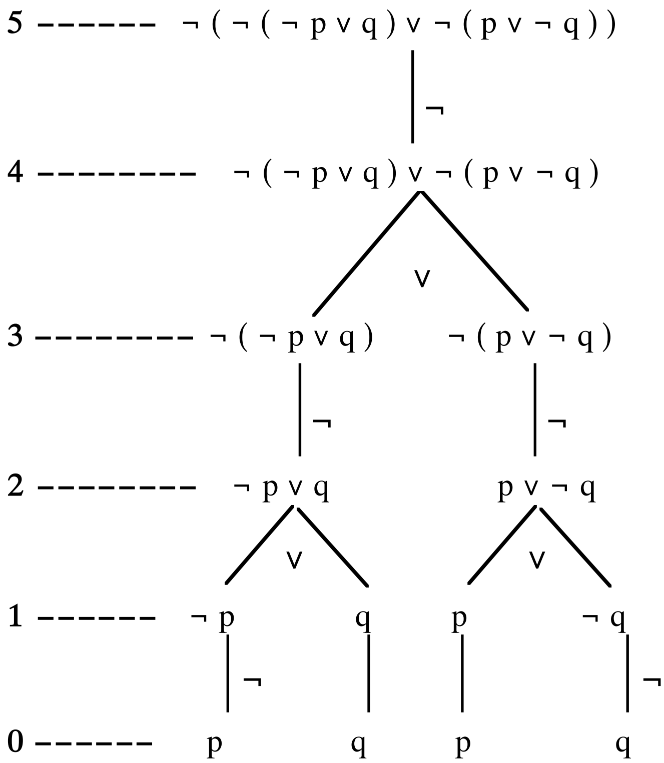
A chaque formule est associée un tableau qui vaudra pour sa dernière colonne.

2) Longueur des énoncés

L'analyse en arbre d'un énoncé permet de définir les étages de cet arbre. Nous appellerons longueur de l'énoncé le nombre d'étage d'un tel arbre.

Donnons l'exemple de l'analyse de l'énoncé abrégé (p⇔q) soit :

$$\neg(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q))$$



Si nous reportons en indices les numéros que nous avons fait figurer en marge de chacune des lignes de l'arbre de notre exemple, celui-ci s'écrit alors :

$$\underset{5}{\neg}(\underset{3}{\neg}(\underset{1}{\neg} p \underset{2}{\vee} q) \underset{4}{\vee} \underset{3}{\neg}(p \underset{2}{\vee} \underset{1}{\neg} q))$$

Et nous disons alors que nous avons un énoncé de longueur 5

Annexe n°3

Démonstrations en topologie du sujet

Nous pouvons donner une interprétation sémantique, en termes de tables, à notre logique modifiée, comme nous venons de le faire pour le calcul des propositions non analysées la logique canonique classique

Afin de former sa conviction, grâce à la validité, le lecteur débutant peut former alors les tables de vérité des expressions que nous lui proposons dans le texte, comme il peut le faire pour sélectionner les thèses et vérifier qu'il s'agit bien de tautologies.

De manière équivalente, il peut tracer des schémas à la manière de Euler-Venn, ils sont des traductions, équivalentes de manière stricte, des tables de vérité. Et ils ne sont que cela.

Nous soulignons cette étape comme une façon de raisonner en logique sur des dessins. Elle peut être prolongée en une réflexion qui nous conduira à la topologie des objets souples (Graphes, surfaces, noeuds).

Mais le lecteur débutant peut vouloir aussi apprécier l'activité du logicien mathématicien en éprouvant par lui-même quel est son acte. Pour cela nous lui proposons d'établir les thèses par une méthode de démonstration qui renvoie aux démonstrations en logique canonique classique.

La méthode de double trivialisation d'A.Van Bellingen

1 - méthode :

Commençons par énoncer la méthode de double trivialisation.

En présence d'une formule de la logique modifiée, il faut et il suffit de retranscrire deux fois l'énoncé en question. Chaque retranscription de la formule se fait en suivant l'arbre qui décrit la longueur de l'énoncé (voir appendice n°2).

(a) une première fois en remplaçant

- chaque occurrence de la première négation modifiée $\sim p$ par la négation classique $\neg p$

et

- chaque formule partielle commençant par la seconde négation modifiée $\bar{p}$ par un signe qui connote le faux $(p \wedge \neg p)$, que nous écrirons Ø)

(b) une deuxième fois en remplaçant

- chaque formule partielle commençant par la première négation modifiée $\sim p$ par un signe qui connote le faux $(p \wedge \neg p)$, que nous écrirons Ø),

et

- chaque occurrence de la deuxième négation modifiée $\bar{p}$ par la négation classique $\neg p$.

La formule de la logique modifiée mise à l'épreuve sera un théorème de la topologie du sujet, si et seulement si les deux énoncés retranscris sont des théorèmes de la logique classique.

L'énoncé de la méthode est maintenant terminé.

Par commodité, nous conseillons au lecteur de s'exercer à tracer l'arbre syntaxique de quelques formules de la logiques modifiée et de commencer, afin d'obtenir les retranscription (a) et (b), à parcourir cet arbre par le bas lorsque l'on remplace une négation par la négation classique, et par le haut lorsque l'on remplace une formule partielle par le faux dès qu'elle commence par une des deux négations modifiée.

De cette manière une seule réduplication de l'arbre suffit pour chacune des retranscriptions, et l'on peut remarquer qu'elle produit de vaste coupure dans le graphe de cet arbre, à la manière dont Freud traite des réseaux neuronniques dans "L'esquisse d'une psychologie scientifique"[4]

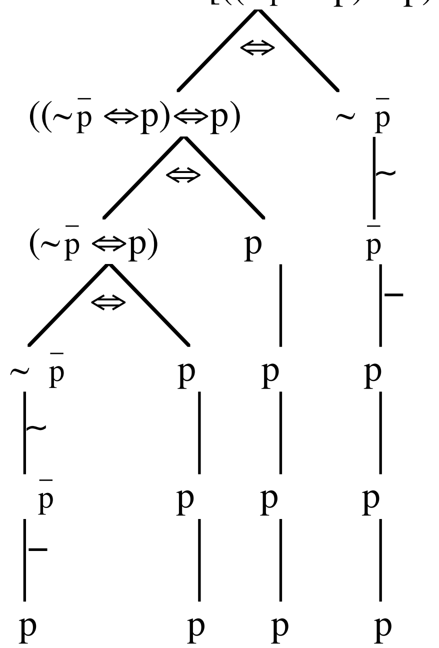
Donnons un exemple afin de démontrer la validité de l'énoncé :

$$[((\sim\bar{p} \Leftrightarrow p)\Leftrightarrow p)\Leftrightarrow\sim \bar{p}]$$

[4] - S. FREUD "La Naissance de la psychanalyse" fig 13 p.333, fig.14 p.342, fig.16 p.365, P.U.F. Paris 1956

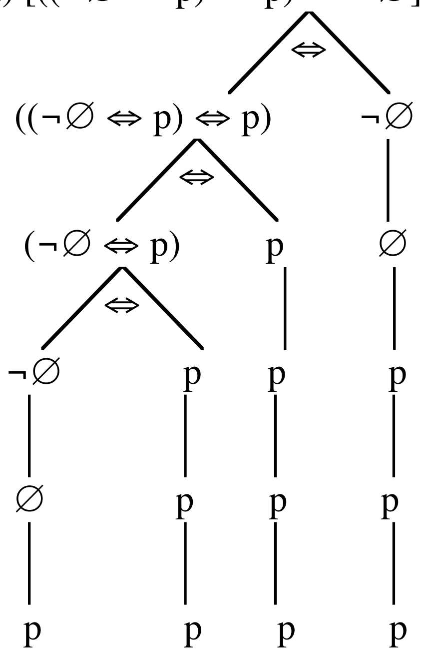
Voici son arbre :

$[((\sim\bar{p} \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow \sim \bar{p}]$

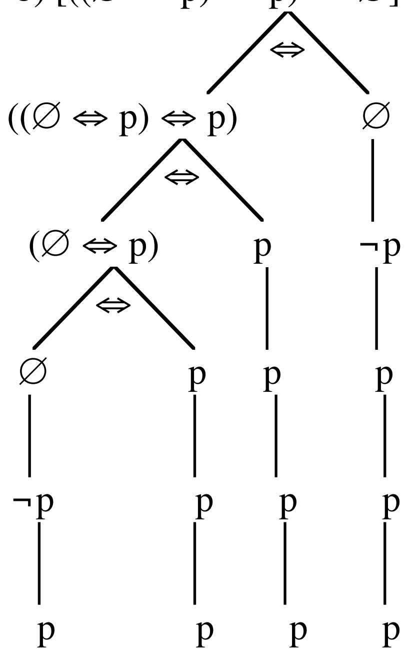


En voici les retranscriptions suivant les deux protocoles partant du bas de l'arbre :

a) $[((\neg\varnothing \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow \neg\varnothing]$



b) $[((\varnothing \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow \varnothing]$



Les deux expressions sont des théses classiques:

a) $[((\neg\varnothing \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow \neg\varnothing]$ vaut pour $((\neg\varnothing \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow p)$ soit $(p \Leftrightarrow p)$

si nous remplaçons toujour $(p \Leftrightarrow \neg\emptyset)$ ou $(\neg\emptyset \Leftrightarrow p)$ par p.
Or $(p \Leftrightarrow p)$ est une thèse classique (faite sa table si vous en doutez).

b) $[((\emptyset \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow \emptyset]$ vaut pour $[\neg ((\emptyset \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow p)]$ soit $[\neg (\neg p \Leftrightarrow p)]$
si nous remplaçons toujour $(p \Leftrightarrow \emptyset)$ oυ $(\emptyset \Leftrightarrow p)$ par $\neg p$.
Or $[\neg (\neg p \Leftrightarrow p)]$ est une thèse classique (faite, ici aussi, sa table si vous en doutez).

2 - Etayage de la méthode :

Cette méthode est la traduction dans le métalangage d'un théorème de la logique modifiée.

Elle consiste à ajouter comme méthode un principe supplémentaire aux principes démonstratifs donnés dans la définition de la théorie (comme le modus ponens est lui-même la transposition d'un théorème de la logique classique)

$$\vdash((p\wedge(p\Rightarrow q)) \Rightarrow q)$$

Cette méthode repose donc sur l'expression suivante, dite des deux doubles trivialisations inverses l'une de l'autre :

$$\text{si } \sim\bar{p} \text{ alors } (\sim q \Leftrightarrow \neg q) \text{ et } \neg\ \bar{q})$$
$$\text{et si } \neg\sim\bar{p} \text{ alors } \neg\sim q \text{ et } (\bar{q}\Leftrightarrow\neg q)$$
$$\text{et } (\sim\bar{p}\vee\neg\sim\bar{p})$$

qui est la traduction de la thèse des deux doubles trivialisations

$$\vdash ([\sim\bar{p} \Rightarrow ((\sim q \Leftrightarrow \neg q) \wedge \neg\ \bar{q})]$$
$$\wedge[\neg\sim\bar{p} \Rightarrow (\neg\sim q \wedge (\bar{q}\Leftrightarrow\neg q))]$$
$$\wedge\ [\sim\bar{p}\vee\neg\sim\bar{p}])$$

où nous voyons bien que la négation n'est pas strictement identifiable sans négligeance grave avec la valeur de vérité identifiée par le faux nécessaire des antilogies.

Retour sur les méthodes de logique.

L'emploi d'une telle méthode de démonstration à partir d'un théorème pose un double problème qui est au principe de ce que nous montrons et discutons comme l'enjeu de la logique et de la doctrine de la vérité.

Premièrement il fait usage de la transcription d'une formule du langage objet écrite en petites lettres avec les connecteurs logique, en une expression du métalangage écrite en grandes lettres avec des connecteurs écrits dans la langue du commentaire.

Deuxièmement il fait passer dans le métalangage lui-même, une formule précédée du signe d'assertion $\vdash P$ en un énoncé sans indications supplémentaires P

Cet emploi fait donc un fort usage de l'assimilation

$$\vdash P = P$$

dans le métalangage et du recours à la présentation d'une théorie écrite dans un langage objet en un calcul des formules dans le métalangage.

Nous sommes justifié d'appliquer une telle méthode puisque nous avons dit que nous faisions de la logique dans le métalangage comme cela se fait couramment en mathématique. Ceci afin de ne pas surajouter des méta-métalangages aux métalangages. Car une double articulation de ces hiérarchies de langage suffit à notre démonstration si l'on sait que la pulsation de la structure se répète à chaques étages.

J.M.Vappereau
Plaisance le 30 Août 1993

TABLE DES MATIÉRES

TABLE DES MATIÉRES