ANNEXE 5

La théorie axiomatisée des ensembles

Rappels en Théorie des ensembles

Nous devons d'abord présenter succinctement la théorie axiomatique des ensembles due à Zermelo et à Fränkel, désormais (Z-F), selon notre méthode de lecture qui consiste à donner une raison - qui n'est pas exclusive comme toujours en mathématique (polysémie des formules contraire à la croyance courante, unilatérale et dogmatique) – permettant de lire et d'apprécier voir d'écrire les formules, dites axiomes, qui sans cela restent muettes pour le lecteur.

Nous renvoyons à Nons (Logique, théorie des ensembles et topologie générale) notre fascicule de résultats n°0, pour l'exposé élémentaire et direct, sous une forme systématique, de la théorie des ensembles selon l'axiomatisation (Z-F), dont nous faisons usage ici[1].

1.1. **Une relation singulière et des axiomes spécifiques**

Plaçons-nous en Langage des prédicats du premier ordre, c'est à dire que nous admettons et considérons connu le Calcul des propositions, soit la théorie de la vérifonctionnalité qui régit la coordination grammaticale entre concepts et entre propositions. Puis le Langage des prédicats du premier ordre monadiques et quelques résultats élémentaires relatifs aux prédicats polyadiques, soit la théorie de la kantification qui croise les deux régimes de la coordination des concepts et des propositions.

En un mot La Logique canonique classique, l'agencement de la théorie de la vérifonctionnalité et de la théorie de la kantification, désormais (LCC).

Nous commençons par préciser comment se présente la théorie des ensembles axiomatisée dans sa version (Z-F) dans ce contexte et comment nous voulons nous en servir.

Avançons dans la théorie des ensembles.

1.1. Il y a une relation binaire, notée ∈, elle donne lieu aux énoncés bien construits du type

$$(x \in y)$$

qui vont apparaître dans notre discours (seule relation originale de cette théorie) accompagné de la relation d'identité

$$(x=y)$$

qui paraît aussi dans nos écritures.

1.2. Il y a les axiomes de la théorie qui légifèrent sur l'emploie de cette relation.

- **La relation** $(x \in y)$ dite d'appartenance, est une relation primitive singulière. De ce fait, la singularité de cette relation, nous ne sommes plus en Logique mais en Mathématiques. Ou, au moins, dans le *no man's land* entre les deux discours, du fait de courir le risque d'introduire par cette relation spécifiée, l'incomplétude de la théorie que nous allons construire avec elle.

La Logique a été démontrée consistante et complète (premier théorème de Gödel).

Les mathématiques ont été démontrées incomplète du fait de contenir l'arithmétique (second théorème de Gödel).

- **Les axiomes**, ceux sont eux qui spécifient la relation singulière en question. De fait nous savons qu'ils introduisent l'arithmétique sous l'aspect des ensembles ordinaux dans cette

---

[1] Pour ceux qui voudraient s'avancer plus dans ce domaine nous signalons
Méthodes de Logique de W. O. Quine, A. Colin éditeur, à Paris.
Théorie des ensembles axiomatisée de J.L. Krivine, dernière édition chez Gassendi éditeur, à Paris.

construction. La collection des ordinaux est une conséquence des axiomes, nous en dirons un mot au titre d'un exemple de conséquence tirée des axiomes.

Cette construction est par conséquent incomplète. Mais ce n'est pas là l'aspect qui nous occupe aujourd'hui et ici. Nous allons nous intéresser à son aspect syntaxique et déductif, écriture qui rend compte de multiples intuitions.

1. 2. **Trois types d'axiomes**

Commençons par donner les formules qui écrivent et ainsi réalisent les axiomes de la théorie (Z-F). Elles font désormais partie de la réalité. Il y a trois types d'axiomes sous cet aspect.

I - **Premier type**

L'axiome d'extensionalité

$$\forall x\ \forall y[\forall z((z\in x \Leftrightarrow z\in y) \Rightarrow (x=y)]$$

Sa structure syntaxique présente au début de sa formule un couple de kanteurs universels : "$\forall x\ \forall y$...", sa fonction reste à part, elle consiste à articuler entre elles les deux seules relations primitives et spécifiques de la théorie, l'appartenance, notée : $\in$, et l'identité, notée : =.

Écrite avec des constantes, il donne lieu à la proposition

$$[\forall z((z\in a \Leftrightarrow z\in b) \Rightarrow (a=b)]$$

II - **Deuxième type**

L'axiome des parties

$$(Ax_P)\ \forall x\ \exists y[\forall z(z\in y \Leftrightarrow \forall t(t\in z \Rightarrow t\in x)]$$

L'axiome de l'union

$$(Ax_U)\ \forall x\ \exists y[\forall z(z\in y \Leftrightarrow \exists u(z\in u \wedge u\in x)]$$

Le schéma[2] d'axiome de substitution

$$(Ax_S)\ (\forall t\ \forall u \forall u'[E(t,u) \wedge E(t,u') \Rightarrow u = u']$$
$$\wedge\ \forall x\ \exists y[\forall z(z\in y \Leftrightarrow \exists v(v\in x \wedge E(v,z))]\ )$$

La structure syntaxique de chacun présente un couple de kanteurs l'un universel, l'autre existentiel : $\forall x \exists y$ (au début, avec une petite variante dans le cas du schéma d'axiome par opposition aux deux précédents), la fonction de chacun consiste à produire des ensembles à partir d'ensembles donnés ou déjà produit par le même procédé.

Ainsi nous parlerons d'une fabrique d'ensembles du fait de cette fonction pour la plus part des axiomes (ils sont infinis en nombre car ils sont nombreux a être produit par un schéma d'axiome qui assure d'autant d'axiomes différents que de relations E(x,y) différentes, inscriptibles dans le langage de la théorie. Il y en a une infinité au sens de l'absence de borne assignable à ce procédé d'écriture)

III - **Troisième type**

L'axiome de l'infini

$$Ax_\omega\ \exists x\ \neg f(x)$$

Sa structure syntaxique présente au début un kanteur existentiel : "$\exists x$...", sa fonction, comme nous allons le découvrir à la lecture des autres axiomes, reste d'introduire l'existence de l'au moins un ensemble nécessaire pour que les autres ensembles existent.

Les axiomes du deuxième type n'assurent l'existence, la fabrication, de nouveaux ensembles qu'à la condition de l'existence d'un premier ensemble produit par une voie différente.

---

[2] Schéma d'axiome et non axiome à cause de la présence de la relation E(x,y) qui doit être fonctionnelle en y. Il y a autant d'axiomes que de relations de ce type produits par le schéma d'axiome.

Ainsi tout est déjà dit. Mais maintenant, avec ces notions, se pose une question au lecteur. Comment lire ces axiomes ?

Répondre à cette question nous fait passer à l'étape suivante de notre lecture.

1. 3. **La fabrique d'ensembles (les axiomes commentés)**

Nous pouvons présenter cette théorie axiomatisée comme une petite fabrique d'ensembles. Cette notion de fabrication ou de production d'objets va nous permettre d'analyser les axiomes dans leur structure syntaxique intrinsèque. Nous distinguerons ainsi tout ceux, ils sont infinis en nombre, qui ont la même structure et la même fonction (le deuxième type d'axiomes) par opposition aux deux autres axiomes, le premier et le dernier, qui jouent chacun un rôle spécifique.

Le premier axiome, l'axiome d'extensionalité

Le premier définit la relation d'identité (x=y) par l'expression

$$R_0(x,y) : \forall z((z \in x \Leftrightarrow z \in y)$$

qui est bien un énoncé ouvert en x et en y puisque ces deux lettres ne sont pas liées par un kanteur.

Cette relation écrit qu'entre deux ensembles x et y il y a un lien si leurs extensions respectives (classes ou collections de leurs éléments) sont équivalentes en logique.

L'axiome dit que pour tout x et tout y la relation R_0 implique que ce lien entre x et y c'est l'identité

$$\forall x \ \forall y[R_0(x,y) \Rightarrow (x=y)]$$

soit notre axiome,

$$\forall x \ \forall y[\forall z((z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow (x=y)]$$

qui porte bien ainsi son nom, extensionalité .

Il ne reste, à ce propos, qu'une question de logique, à résoudre en pratique dans ce langage dit des prédicats du premier ordre. Elle consiste à s'assurer que cette implication matérielle suffit, dans tous les cas rencontrés de manière effective, en pratique donc, pour déterminer l'emploi de l'identité en question.

Nous laissons cela, ici, au lecteur qui voudrait profiter de cette occasion pour commencer à pratiquer la logique mathématique de façon élémentaire mais combien instructive. Pour s'instruire de ces lois d'écriture, nous le renvoyons à notre ouvrage NONS dont c'est la fonction que d'y introduire le lecteur.

Le dernier axiome, l'axiome de l'infini

Un commentaire pour le dernier axiome, comparable à celui que nous venons de faire pour le premier, est donné par les définitions et les axiomes de la première partie de l'Éthique de Spinoza intitulé de Dieu.

Telle est notre thèse dans cette étude.

Mais pas sans prendre en compte sa fonction au regard des autres axiomes (ceux du second type).

Le lecteur comprendra, alors que nous renvoyons plus loin notre commentaire de cet axiome dit de l'infini, après le commentaire commun à l'infinité des autres axiomes qui ont tous la même structure.

Les explications que réclame leur structure syntaxique commune font aussi partie des définitions et des axiomes de cette première partie de l'Éthique. Ainsi procéderons nous d'abord à leur commentaire.

La structure syntactique commune aux autres axiomes

Mise à part le premier et le dernier axiome, les autres, au nombre de deux plus une infinité, du fait de la notion de schéma d'axiome, présentent la même structure syntaxique interne.

Cette structure de choix et d'ordre des lettres qui les composent peut être rendu ainsi.

$$Ax_R\ \forall x\ \exists y[\forall z(z\in y \Leftrightarrow R(x,z)]$$

Et elle montre qu'il s'agit d'une fabrique d'ensembles à partir d'ensembles donnés.

Ceci se lit de telle manière que dés le début de la phrase qui commence par

"$\forall x\ \exists y$..."

nous pouvons déduire qu'il s'agit bien de dire :

"si nous disposons de x quelconque, il existe y"

soit de produire secondairement un ensemble, noté : y, à partir d'un ensemble, noté : x, donné auparavant. L'axiome assure de l'existence de y lorsque x est déjà là. Ou il s'agit dans ce type d'axiome étant donné un ensemble x quelconque de produire la nécessité de l'ensemble y.

La suite de la formule indique comment l'ensemble noté : y, est fabriqué à partir de l'ensemble noté : x, en déterminant ce que sont les éléments z de y à partir de leur relation avec x.

"le z quelconque sera élément de y
si et seulement si
il est en relation avec x par la relation R"

$$\forall z(z\in y \Leftrightarrow R(x,z)$$

Reprenons la forme générale des axiomes du deuxième type,

$$Ax_R\ \forall x\ \exists y[\forall z(z\in y \Leftrightarrow R(x,z)]$$

pour vérifier qu'il en est bien ainsi. Chaque axiome présente dans son expression d'une relation binaire R(x,y) et ils différent entre eux par l'expression de cette relation.

Axiome des parties

$R(x,z) : \forall t(t\in z \Rightarrow t\in x)$

$Ax_P\ \forall x\ \exists y[\forall z(z\in y \Leftrightarrow \forall t(t\in z \Rightarrow t\in x)]$

Axiome de l'union

$R(x,z) : \exists u(z\in u \wedge u\in x)$

$Ax_U\ \forall x\ \exists y[\forall z(z\in y \Leftrightarrow \exists u(z\in u \wedge u\in x)]$

Schéma d'Axiome de substitution

Si il est entendu que la relation dyadique (binaire) E(x,y) est fonctionnelle en x ce qui s'écrit

$$\forall x\ \forall y \forall y'[E(x,y) \wedge E(x,y') \Rightarrow y = y']$$

c'est à cette fin que le schéma d'axiome proprement dit (voir plus haut) est précédé de cette phrase en terme de t , de u et de u'.

$$\forall t\ \forall u \forall u'[E(t,u) \wedge E(t,u') \Rightarrow u = u']$$

Il reste alors

$R(x,z) : \exists v(v\in x \wedge E(v,z))$

$Ax_S\ \forall x\ \exists y[\forall z(z\in y \Leftrightarrow \exists v(v\in x \wedge E(v,z))]$

Ainsi chaque axiome de ce type est bien de la forme

$$Ax_R\ \forall x\ \exists y[\forall z(z\in y \Leftrightarrow R(x,z))]$$

et le lecteur peut commencer pour son propre compte à regarder de plus prés les expressions de ses diverses relations. Par exemple dans le cas de l'axiome des parties, peut-il lire que la relation R(x, z) n'est que la relation d'inclusion bien connue de la théorie des ensembles ($z\subset x$). Et ainsi poursuivre par d'autres remarques du même ordre. Il nous faudra y revenir ailleurs.

1.4. **Le schéma de compréhension**

Introduisons un nouveau type de schéma déductible du schéma d'axiome de substitution afin de faire voir une différence importante pour la théorie des ensembles (notion de définition des ensembles en compréhension et qui va apparaître dans l'Éthique de Spinoza telle que nous proposons de la lire.

Ici nous ajoutons un développement qui paraîtra technique, mais pas plus que ce qui précède et que ce qui va suivre.

Ceci dit afin que le lecteur apprécie bien le rôle de la matérialité (support, localisation selon Lacan en fait différence phonématique des linguistes) de l'écriture, ici un peu spécifique (c'est ce que cherche à désigner le terme de technique chez ceux qui la réprouve), mais à y réfléchir le lecteur pourra se persuader que chaque écriture est technique et ne paraît telle qu'à ceux qui n'en ont pas l'usage, faute de l'avoir re-inventé pour leur propre compte, afin de s'en donner la pratique.

Il s'agit à l'occasion du schéma d'axiome de voir que nous pouvons en déduire un schéma de fabrication dit de compréhension, moins substitutif, en apparence, de jouer, dans l'écriture de la relation dyadique E(x, y), sur l'existence de l'autre relation d'identité, déjà rencontrée, afin de mettre en fonction, dans la construction, les relations monadiques, comme : A(x).

Il s'agit d'apprendre à lire le composé

$$(x=y \wedge A(y)) \text{ pour } E(x,y)$$

qui vient pour A(x) en fait, mais présentée ainsi comme une relation E(x,y) du type binaire (dyadique) et fonctionnelle en x du fait de la relation d'identité régi par l'axiome extensionalité.

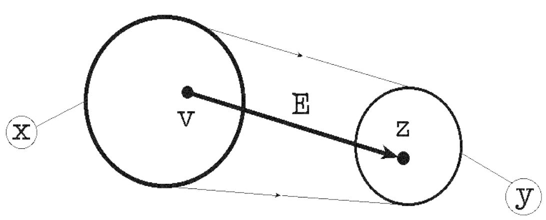
Ainsi vient notre dernier cas de formules exemplaires de ce type, avec le schéma de compréhension,

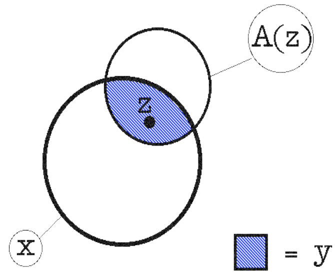
$$S_C \ \forall x \ \exists y[\forall z(z \in y \Leftrightarrow (z \in x \wedge A(z))]$$

dont chaque exemplaire suivant la variation de la relation monadique A(x) est déductible du schéma d'axiome de Substitution dépendant d'une relation dyadique E(x,y) qui est fonctionnelle.

$$SAx_S \ \forall x \ \exists y[\forall z(z \in y \Leftrightarrow \exists v(v \in x \wedge E(v,z))]$$

Illustrons ces schémas de compréhension par deux diagrammes qui montrent la différence qu'il entretient avec le schéma de substitution.





$SAx_S \ \forall x \ \exists y[\forall z(z \in y \Leftrightarrow \exists v(v \in x \wedge E(v,z))]$ $S_C \ \forall x \ \exists y[\forall z(z \in y \Leftrightarrow (z \in x \wedge A(z))]$

Substitution et Compréhension

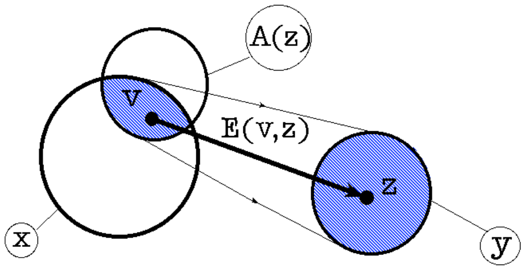
Lorsque nous écrivons ((v=z) ∧ A(z)) pour E(v, z) dans la formule du schéma de substitution

$$\forall x \ \exists y[\forall z(z \in y \Leftrightarrow \exists v(v \in x \wedge ((v=z) \wedge A(z)))]$$

nous obtenons un énoncé susceptible de transformations et de simplifications.

Les conjonctions peuvent être considérées du même registre dans une parenthèse unique du fait de l'associativité et réordonnées du fait de la commutativité.

Nous rendons cette situation par un diagramme.



$$\forall x\ \exists y[\forall z(z\in y \Leftrightarrow \exists v(\ (v=z\ ) \wedge (v\in x) \wedge A(z)\ )]$$

La Substitution vers la Compréhension

Expression d'où le kanteur existentiel peut être extrait portant sur v et ne pourtant pas sur les lettres z et y qui précédent,

$$\forall x\ \exists y[\forall z \exists v\ (z\in y \Leftrightarrow (\ (v=z\ ) \wedge [\ (v\in x) \wedge A(z)\ ]\ )]$$

mais dans un premier temps sans dépasser la kantification de z.

Ceci donne lieu à un regroupement hors de la parenthèse principale

$$\forall x\ \exists y[\forall z \exists v\ (z\in y \Leftrightarrow (\ (v=z\ ) \wedge [\ (v\in x) \wedge A(z)\ ]\ )]$$

Le changement d'ordre des kanteur est rendu possible et la disparition de v est facile à produire du fait de l'équivalence (v=z) lu comme une fonction, ici l'identité de z avec lui même,

$$v = i(z).$$

Or cette commutation est inutile car i(z) = z rend superflue cette prolifération de lettre, i ne sert plus et disparaît derrière z, soit le schéma de compréhension

$$S_C : \forall x\ \exists y[\forall z(z\in y \Leftrightarrow (z\in x \wedge A\ (z))]$$

Ajoutons que ce type de formule répond bien à la lecture que nous faisons du second type d'axiomes de la théorie (Z-F). Elle présente une relation binaire R(x,y) dans sa formule et diffère des autres formules axiomatiques par l’expression de cette relation.

Schéma de compréhension

$R(x,z) : \exists v(v\in x \wedge (\ v=z \wedge A(z))) : (z\in x \wedge A(z))$

$E(v,z) : (v=z \wedge A(z))$

$S_C\ \forall x \exists y[\forall z(z\in y \Leftrightarrow (z\in x \wedge A(z))]$

1.5. **Reprenons maintenant l’axiome de l’infini**

$$Ax_{\omega}\ \exists x \neg f(x)$$

Il est le seul, dans la théorie (Z-F) à commencer par un kanteur d'existence et joue par conséquent un rôle clé puisqu'il est ainsi le seul a permettre d'amorcer la fabrication d'ensemble, car il faut bien qu'il y en ait au moins un qui existe.

Il est ainsi celui qui assure l’existence d’une substance au sens de Spinoza (première partie, définition III), c’est ici que commence la formulation de l’Éthique comme Logique de la théorie des ensembles.

fin de l'annexe 5