Démonstration du théorème majeur de Lacan

Ayant réussit à établir *le théorème majeur de Lacan*, nous donnons ici la démonstration que nous lui avons trouvée.

Commençons par rappeler l'expression de ce théorème, nous donnerons en annexe les quatre définitions nécessaires à sa lecture.

Le Théorème majeur de Lacan:

Pour tout *nombre entier* fini noté : n, si n est *un nombre pair*, toutes les *permutations* ($\varphi \in S_n$) de n, f : [n] → [n] ne produisent aucune permutation parmi les *applications* g : [n] → [n] définies par l'expression (g = φ + i) où i : [n] → [n] est la permutation neutre ou l'application identique sur n définie par i(x) = x.

La première annexe qui suit cette démonstration énonce les quatre définitions nécessaires à la lecture de ce théorème. Elle définie les termes : *application, permutation, nombre entier* et enfin *nombre pair*.

C'est dire que la parité du nombre n est décisive, car si n est paire toutes les applications g, définies par (g = φ + i) à partir d'une quelconque permutation φ et de l'identité i sur n objets, ne sont pas des permutations et ainsi vérifient la relation ($g \notin S_n$).

En calcul des prédicats du premier ordre le théorème majeur de Lacan s'écrit

$$\forall n[\exists k(n=2k) \Rightarrow \forall \varphi(\varphi \in S_n \Rightarrow \forall g((g = \varphi + i) \Rightarrow (g \notin S_n)))].$$

Afin de donner une démonstration assez directe de ce théorème nous allons nous fournir au préalable d'un indicateur facile à définir et de deux lemmes qui accompagnent cette définition.

Définition

Pour un ensemble ordinale fini n = $\{\mathcal{O}(x)/\ 0 \leq x \leq n-1\}$ la *somme d'indice n* notée : Σ_n, est définie comme la somme des prédécesseurs de l'ordinal n par la formule

$$\mathbf{\Sigma_n = \Sigma_{i \in n} x_i}$$

où les $x_i = i$, sachant que l'ordinal n est l'ensemble de ces prédécesseurs $0 \leq x_i \leq n-1$.

Lemme 1

La valeur de la *somme d'indice n* définie précédemment est donnée par l'expression

$$\mathbf{\Sigma_n} = 1/2\ n(n-1).$$

Afin de faciliter au lecteur l'intelligibilité de ce résultat, nous donnons, grâce à un subterfuge graphique, la manière de l'obtenir qui s'inspire de sa véritable démonstration et qui –consiste à écrire deux fois cette série, la seconde version étant écrite de manière rétrograde au regard de la première ou si vous préférez : "à l'envers", comme on dit.

$$\Sigma_{i \in n} x_i = \quad 0 \quad + \quad 1 \quad + 2 + \quad ... \quad + (n-2) + (n-1).$$

$$\Sigma_{i \in n} x_i = (n-1) + (n-2) + \quad ... \quad + 2 + \quad 1 \quad + \quad 0$$

c'est une illustration assez commode bien qu'inconsistant, dont il suffit de réaliser l'addition des deux lignes termes à termes

$$2\Sigma_{i \in n} x_i = (n-1) + (n-1) + \quad ... \quad + (n-1) + (n-1)$$

pour constater qu'elle se présente ainsi disposée en une série de termes identiques à (n−1) qui sont au nombre de n. D'où le résultat énoncé par notre lemme 1.

Démonstration effective du lemme 1 (donnée en annexe)

Nous donnons, dans notre seconde annexe, la démonstration effective qui suit le procédé suggéré ici afin de lire et de retenir le résultat donné par notre premier lemme.

Sa démonstration est immédiate au moyen de l'expression générique de la série construite sur une suite arithmétique particulière.

Si le lecteur sait que ce terme général : $\Sigma_{i\in n}(u+ri)$, qui engendre la série construite sur une suite arithmétique, en tant que somme des n termes de cette suite dont le premier est noté : u, et la raison notée : r, répond à l'expression (voir annexe 2),

$$\Sigma_{i\in n}(u+ri) = nu + 1/2\ n(n-1)r.$$

Il lui suffira alors de fixer le premier terme et la raison de la suite arithmétique, u à zéro : (u = 0), et r à un : (r = 1) pour obtenir

$$\Sigma_{i\in n}\ 0+1\times i = n0 + 1/2\ n(n-1)\times 1$$

$$\Sigma_{i\in n}\ i = 1/2\ n(n-1) = \mathbf{\Sigma_n}$$

l'expression donnée par notre lemme.

La démonstration du théorème principal de Lacan se déduit aussi d'un second lemme que nous devons établir maintenant.

Lemme 2

Pour qu'une application quelconque f : [n] → [n] soit une permutation sur n, nous notons ce fait : $(f\in S_n)$, il faut que *la somme de ses éléments images* notée : $\mathbf{\Sigma_f} = \Sigma_{x\in n}f(x)$, soit égale à la valeur de la *somme d'indice n notée :* $\mathbf{\Sigma_n}$, *c'est dire* $(\mathbf{\Sigma_f} = \mathbf{\Sigma_n})$.

Démonstration du lemme 2

Pour s'en convaincre il *suffit* de remarquer le fait qu'une permutation de S_n est par définition bijective sur l'ensemble ordinal fini n. Il suit de là que tous les éléments de n et chacun d'eux sont présents *une fois et une seule fois* parmi les images de la permutation f en question.

Ainsi la somme des éléments images par f, notée : $\mathbf{\Sigma_f}$, sera égale à *la somme d'indice n* notée : $\mathbf{\Sigma_n}$, de tous ces éléments de l'ensemble n.

Soit l'expression la plus succincte de notre lemme,

$$\forall n \forall f((f\in S_n) \Rightarrow (\mathbf{\Sigma_f} = \mathbf{\Sigma_n})),$$

comme c'est le cas des permutations $(\varphi\in S_n)$ parmi lesquelles nous pouvons compter sur la présence de la permutation unité $(i\in S_n)$ évoquée par notre théorème.

Attention cette condition nécessaire n'est pas suffisante, une application f : [n] → [n] peut ne pas être une permutation et présenter une somme notée : $\mathbf{\Sigma_f} = \Sigma_{x\in n}f(x)$ de ses valeurs images, égale à la valeur de la *somme d'indice n* notée $\mathbf{\Sigma_n}$, Mais dans ce cas l'application (f − i) n'est pas une permutation non plus à l'exeption de quelques cas lorsque $\mathbf{\Sigma_n} = 0$. Donnons un contreexemple de cette réciproque pour n = 4 et $\mathbf{\Sigma_4} = 6$ et un exmple pour n = 3 et $\mathbf{\Sigma_3} = 0$,

x	f(x)	f(x) − x
0	1	1
1	2	1
2	2	0
3	1	2
6	6	0

x	f(x)	f(x) −x
0	1	1
1	0	2
2	2	0
0	0	0

Cette précision à une valeur explicative de notre théorème, car le lecteur peut déjà remarquer qu'il ne réclame que l'aspect nécessaire de ce lien de conséquence du fait d'énoncer une condition suffisante portant dans certains cas, dont il note le trait, de la négation nécessaire de l'existence de telles permutations.

Il s'agit de démontrer, pour toutes les fonctions g, qu'elles n'appartiennent pas à S_n. et de recourir à la version contraposée de notre lemme,

$$\forall n \forall f((\mathbf{\Sigma_f} \neq \mathbf{\Sigma_n}) \Rightarrow (f \not\in S_n)).$$

Pourvu de ces données nous pouvons maintenant déplier la démonstration du théorème principal de Lacan.

Démonstration du théorème principal de Lacan

1) - **Le principe de la démonstration**

Il consiste à suivre $\mathbf{\Sigma_n}$ la somme d'indice n , somme des éléments de l'ordinal n, d'entre les valeurs respectives : $\mathbf{\Sigma_\varphi}$, $\mathbf{\Sigma_i}$ et $\mathbf{\Sigma_g}$, des sommes des images des applications φ, i et g.

Cette somme est donnée par une définition $\mathbf{\Sigma_f} = \Sigma_{x \in n} x$ comme l'expression de la dite *somme d'indice n* dont la valeur est donnée par notre lemme 1 : $\mathbf{\Sigma_n} = 1/2n(n-1)$.

1.1. Précisons encore dans un nouveau lemme pourquoi ce chiffre est déterminant et ce qu'il détermine en ce qui concerne la démonstration de notre théorème.

Lemme 3

Pour tout entier n et toute permutation $\varphi : [n] \rightarrow [n]$, la somme des éléments images d'une quelconque fonction g telle que *$(g = \varphi + i)$* est composée par addition de l'identité i à φ, notée : $\mathbf{\Sigma_g} = \Sigma_{x \in n} g(x)$, vaut *le double* notée : $2\mathbf{\Sigma_n}$ *de la somme d'indice n*, définie plus haut.

Démonstration et explicitation du lemme 3

Nous l'expliquons et nous le démontrons grâce à un diagramme qui exhibe la récurrence finie, où il suffit de disposer les données du théorème de la manière suivante pour un cas quelconque de l'ordinal fini n,

i(x) = x	φ(x)	g(x) = φ(x) + i(x)
0	φ(0)	φ(0) + 0
1	φ(1)	φ(1) + 1
2	φ(2)	φ(2) + 2
....	....	....
(n−2)	φ(n−2)	φ(n−2) + (n−2)
(n−1)	φ(n−1)	φ(n−1) + (n−1)
$\mathbf{\Sigma_n}$	$\mathbf{\Sigma_n}$	$2\mathbf{\Sigma_n}$

pour établir dans tous les cas en quoi la somme des éléments images de g vaut nécessairement le double de la somme d'indice n, soit notre troisième lemme,

$$[(\varphi \in S_n) \wedge (g = \varphi + i)) \Rightarrow [\mathbf{\Sigma_g} = 2\mathbf{\Sigma_n}]$$

1.2. Si nous rapprochons ce résultat de celui obtenu selon notre lemme précédent (lemme 2), qui énonce : si l'application f est une permutation, ici dans le cas de g, alors la somme de ses éléments images $\mathbf{\Sigma_g}$ est égale à $\mathbf{\Sigma_n}$

$$\forall g[(g \in S_n) \Rightarrow (\mathbf{\Sigma_g} = \mathbf{\Sigma_n})]$$

qui fait apparaître dans ce cas que la conjonction des deux équations

$$(\mathbf{\Sigma_g} = \mathbf{\Sigma_n}) \text{ et } (\mathbf{\Sigma_g} = 2\mathbf{\Sigma_n}) \text{ se résume en } (2\mathbf{\Sigma_n} = \mathbf{\Sigma_n})$$

pour venir à la place de la conséquence donné par le lemme 2,

$$\forall g[(g \in S_n) \Rightarrow (2\mathbf{\Sigma_n} = \mathbf{\Sigma_n})]$$

Ceci pourrait donner l'occasion d'une quatrième lemme, mais rappelons que nous voulons utiliser ce résultât selon son expression contraposée.

1.3. Nous allons nous intéresser aux cas où cela ne se produit pas pour déterminer les valeurs de n qui produisent les situations où pour toutes les permutations ($\varphi \in S_n$), les composés par la somme telles que $g = \varphi + i$ ne seront jamais des permutations comme l'énonce le théorème de Lacan.

A cette fin nous allons utiliser notre dernier résultat dans son expression contraposée,

$$\forall g[(2\mathbf{\Sigma_n} \neq \mathbf{\Sigma_n}) \Rightarrow (g \notin S_n)]))]$$

cet énoncé nous conduit à la conclusion partielle de la première étape que nous pouvons établir à partir de ce résultat qui dit que pour tous nombres entier n et une quelconque permutation φ la fonction obtenue par($g = \varphi + i$) est telle que ($2\mathbf{\Sigma_n} \neq \mathbf{\Sigma_n}$) implique ($g \notin S_n$).

1.4. Ce qui peut se transcrire en vertu des lois standards de la coordination et de la kantification du premier ordre en,

$$\forall n[(2\mathbf{\Sigma_n} \neq \mathbf{\Sigma_n}) \Rightarrow \forall\varphi\forall g([(\varphi \in S_n) \wedge (g = \varphi + i)] \Rightarrow (g \notin S_n))]$$

ou s'écrire aussi

$$\forall n[(2\mathbf{\Sigma_n} \neq \mathbf{\Sigma_n}) \Rightarrow \forall\varphi\forall g\ ([\varphi \in S_n] \Rightarrow ((g = \varphi + i) \Rightarrow (g \notin S_n)))].$$

Nous disposons ainsi d'un critère dépendant de la valaeur du nombre entier noté : n, qui décide de l'impossibilité dont parle Lacan d'associer une lettre et une place à chaque discours d'une manière univoque, cette lettre et cette place étant elles même associées univoquement entre elles. A partir de quoi, nous pouvons étudier maintenant l'expression de cette condition

$$(2\mathbf{\Sigma_n} \neq \mathbf{\Sigma_n})$$

en fonction de la parité du nombre ordinal n.

2) - **Etude de $\mathbf{\Sigma_n}$ en fonction de la parité de n**

Nous choisissons de nous placer parmi les nombres entiers supérieures à deux : ($2 \leq n$), du fait du peu d'intérêt, ici (voir anexe 4), mais pas toujours, des fonctions définies sur le vide ($n=0$) ou un singleton ($n=1$), pour généraliser en *théorème principal* ce que nous avons d'abord formulé comme *le théorème de Lacan* dans le cas où ($n = 4$).

Il s'agit de la résolution de l'équation $\mathbf{\Sigma_n} = 2\mathbf{\Sigma_n}$ dont la négation vaut comme condition nécessaire à l'inexistence de permutation ($g \notin S_n$), c'est dire à aucune permutation parmi les fonctions ($g = \varphi + i$) où ($\varphi \in S_n$).

Cette équation écrite $\mathbf{\Sigma_n} = 0$, doit être résolue selon la congruence modulo **n s**achant que $\mathbf{\Sigma_n} = 1/2\ n(n-1)$. Elle devient polynomiale de variable n

$$1/2\ n(n-1) = 0 \text{ (mod. n)}.$$

Il est facile de la résoudre en arithmétique dans l'ensemble des entiers, ici choisis suppérieurs à deux ($2 \leq n$). Il s'agit de trouver les solutions en n telles qu'il existe un entier k qui permet d'écrire que notre polynome est un multiple de n de la manière suivante,

$$1/2\ n(n-1) = kn.$$

ainsi trouver n tel qu'il existe k

$$n(n-1) = 2kn$$

soit pour ($n \neq 0$) puisque ($2 \leq n$)

$$(n-1) = 2k$$

pour obtenir les solutions telles que

$$\exists k(n = 2k+1)$$

ce qui est la façon la plus commune d'écrire que n est impaire.

Les solutions recherchées pour tout nombre entier n plus grand que deux ($2 \leq n$) doivent satisfaire l'équation ($\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}} = 2\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}}$) ou s'écrire aussi

$$\forall n[(2 \leq n) \Rightarrow (\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}} = 0)]$$

énoncé équivalent à

$$\forall n[(2 \leq n) \Rightarrow \exists k[(k \neq 0) \wedge (n = 2k+1)],$$

Dans le cas contraire pour tous les nombres entiers suppérieurs à deux ($2 \leq n$), il suit de cette équivalence matérielle le résultat suivant

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}} \neq 2\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}} \text{ ou } \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}} \neq 0 \text{ si et seulement si } \exists k[(k \neq 0) \wedge (n = 2k)]$$

qui écrit que n est paire (multiple de deux).

Nous utilisons immédiatement ce réqultat pour conclure la démonstration du *théorème majeur de Lacan*, renvoyant le lecteur pour plus d'éléments portant sur la parité du nombre n, à l'annexe 4 à la fin de ce texte.

Conclusion de la démonstration

Nous disposions de l'énoncé que nous avons établi dans le paragraphe précédent

$$\forall n[(2\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}} \neq \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}}) \Rightarrow \forall \varphi((\varphi \in S_n) \Rightarrow \forall g[(g = \varphi + i) \Rightarrow (g \notin S_n)])]$$

qui suivant l'équivalence que nous venons de calculer $\forall n\ [(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}} \neq 2\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}}) \Leftrightarrow \exists k(n = 2k)]$ devient

$$\forall n[\exists k[(k \neq 0) \wedge (n = 2k)] \Rightarrow \forall \varphi((\varphi \in S_n) \Rightarrow \forall g((g = \varphi + i) \Rightarrow (g \notin S_n)))]$$

ce qui ainsi est démontré au titre du *théorème principal de Lacan*.

Jean Michel Vappereau
Belvanera, 1 mai 2012

Annexe 1

Quatre définitions

nécessaires à sa lecture que nous rappelons à l'adresse des lecteurs qui les ont oubliés ou qui les ignorent.

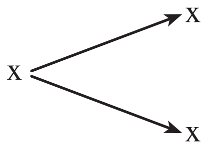
1. Définition de l'application

Une application notée : $f : a \rightarrow b$ est une correspondance entre deux ensembles définie sur leurs éléments respectifs et qui vérifie les propriétés des relations dites fonctionnelles partout définies . Celle-ci veut que tout élément de l'ensemble noté : a, possède un élément correspondant et un seul dans l'ensemble noté : b. Soit écrit en bonne logique

$$\forall x \forall x'[(x = x') \Rightarrow (f(x) = f(x'))].$$

Ce que l'on oublie souvent de préciser comme si cela aller de soit.

Cette définition exclue le schéma



rejeté des applications du fait
de la non fonctionnalité

fig. 1

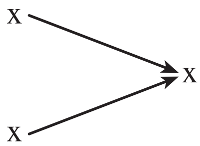
2. Définition de la permutation

Une *permutation* $\varphi \in S_n$, d'un ensemble fini de n éléments, est une *application* bijective de cet ensemble dans lui même notée : $\varphi : n \rightarrow n$, Dans ces circonstances, d'un ensemble en lui même, *bijective* veut dire que l'application est *injective* car elle sera alors surjective de fait.

Chaque élément, unique correspondant d'un élément, ne correspond qu'à un seul et unique élément. Soit en bonne formule

$$\forall x \forall x'[(f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x')]$$

Cette définition exclu le schéma



rejeté des bijections du fait
de la non injectivité

fig. 2

Dans le cas des permutations nous avons choisit comme ensembles finis le nombre entier n écrit ici par un ensemble ordinal comme nous le définissons maintenant.

3. Définition du nombre entier

Un nombre entier est un objet mathématique obtenu depuis Peano à partir de

1. - un premier objet primitif noté : 0
2. - une fonction dite : la fonction successeur notée : $s(n) = n + 1$.

ainsi un nombre entier noté : n, se présente comme une séquence d'écriture du type

$$n = 0 + 1 + 1+ ... +1$$

mais celle-ci n'est pas un mathème bien construit à cause des points de suspensions qui sont passablement inconsistants même si ils sont suggestifs de l'extension finie de chacun de ces nombres.

Un nombre entier est ainsi réductible à une séquence d'écriture, le lecteur pouvant faire de cette pratique littérale l'usage qui lui chante, ce dont nous n'avons rien à dire de plus que de présenter l'usage que nous en avons. Il n'y a rien de normatif en ce domaine seulement des constructions plus ou moins bien faites et quelques risques de dogmatisation si quelques petit maîtres veulent les imposer en silence pour faire tire ce qui n'est pas le cas, plutôt bavard, ici,

Définition de l'écriture du nombre entier

D'où notre intérêt porté aux *systèmes de numérations*.

Il existe plusieurs systèmes d'écriture des nombres. Citons afin de les présenter au lecteur, deux exemples avec *le système de numération par position* de l'algèbre et *la construction des ensembles ordinaux* d'une théorie des ensembles standard qui se respecte. Que dirions nous d'une mathématique qui ne contient pas les rudiments de l'arithmétique.

1) - *Le système de numération par position* est le plus fameux et la plus efficace. Son succès a sans conteste servit de prototype au préjugé paranoïaque très répendue selon lequel l'écriture alphabétique des langues serait un duplicate voir une codification exacte de la langue parlée, dans le meilleur des cas, de la pensée supposée à la place du sujet dans le pire.

La confusion idéologique fait qu'il n'est pas encore possible d'enseigner aux adolescents occidentés que ce système repose sur la structure syntaxique de l'algèbre dite polynomiale, faite d'une somme de monômes d'une variable unique élevée à des degrés successifs par multiplication.

Un nombre entier quelconque est écrit par un polynôme, en fonction d'un nombre choisi dit : le nombre de base du système d'écriture, nombre donné qui

- occupe la place de la variable du polynôme, élevée à divers degrés,
- impose le nombre fini de des lettres primitives entrant dans l'écriture

A partir d'un nombre fini de lettres primitives, son alphabet, qui apparaissent une par une, dans l'écriture du coefficient de chaque monôme.

Donnons un exemple

12.578 écrit pour nous

en base 10 (dix) $1\times10^4 + 2\times10^3 + 5\times10^2 + 7\times10^1 + 8\times10^0$

2) - *Le système de numération des ensembles ordinaux* d'une théorie des ensembles standard lorsque ce système suit des axiomes de la théorie en question. Nous entendons par là, les théories qui suivent la théorie standard à la Zermelo-Fraenkel dite : théorie Z-F.

L'ensemble noté : n, issu de la collection des ensembles ordinaux notée $\mathcal{O}(x)$, qui peut s'écrire d'une manière illustrée,

$$n = \{0, 1, \dots, (n-1)\}$$

suggérant l'écriture en extension de l'ensemble en question formé de ses prédécesseurs, n'est pas l'écriture consistante de ce mathème.

Nous lui préférerons l'expression suivante, véritable mathème produit par les axiomes de la théorie en tant que caractère d'abréviation bien construit,

$$n = \{x \in \omega \;/ 1<x<(n-1)\}$$

où ω est le premier ensemble constructible dans la théorie Z-F, l'ensemble infini produit par son *axiome de l'infini* qui permet de transformer certains *tas* de trucs en *tous*, soit les ensembles ou les objets de la dite théorie. Comme par exemple le tas de trucs ne présentant aucun truc qui donne lieu à l'ensemble vide $\varnothing = \{x \in \omega \;/ (x\neq x)\}$ en logique classique.

Nous adopterons ce *système d'écriture* des nombres entiers qui est dit par là : un *système de numération*.

4. Définition du nombre entier pair

Un nombre entier noté : n, est *pair* lorsqu'il existe un nombre entier fini noté : k, tel que

$$n = 2k.$$

Ainsi les nombres pairs sont les multiples du nombre 2 (deux) parmi les nombre entiers finis.

fin de cette annexe

Annexe 2

Démonstration dogmatique préalable afin d'établir le lemme 1

Définition

Une *suite arithmétique* est une suite de nombres entiers dont chaque terme est obtenu par l'addition d'un nombre constant, dit la raison de la suite, noté : r, au terme précédent.

Ainsi, une suite arithmétique est intégralement déterminée par son premier terme noté : $u_0 = u$, et sa raison r,

de ce fait son terme générique est donnée par l'expression littérale

$$\mathbf{u_i = (u+ri).}$$

D'où le résultat suivant,

Théorème

La série formée par la succession des sommes respectives des termes d'une suite arithmétique est donnée par l'expression récurrente

$$\mathbf{\Sigma_n = nu + 1/2\ n(n-1)r).}$$

Démonstration

Pour l'établir, il nous suffit de calculer l'expression

$$\mathbf{\Sigma_{i\in n}(u+ri) = nu + 1/2\ n(n-1)r)}$$

Nous donnons, la démonstration de ce résultat en suivant le procédé suggéré dans notre texte afin de lire et retenir le résultat donné par notre lemme 1. Si nous disposons les termes de la suite arithmétique de la manière suivante,

$$\Sigma_{i\in n}(u+ri) = \quad u \quad + \quad (u+r) \quad + (u+2r) + \quad \ldots \quad + (u+(n-2)r) + (u+(n-1)r)$$
$$\Sigma_{i\in n}(u+ri) = (u+(n-1)r) + (u+(n-2)r) + \quad \ldots \quad + (u+2r) + \quad (u+r) \quad + \quad u$$

il nous suffit de constater par un calcul rudimentaire que la somme de deux termes de même ordre respectifs vaut : $2u+(n-1)r$.

$$\Sigma_{i\in n}(u+ri) = (2u+(n-1)r) + (2u+(n-1)r) + \quad \ldots \quad + (2u+(n-1)r) + (2u+(n-1)r)$$

que nous obtenons n fois et d'obtenir le résultat

$$2\Sigma_{i\in n}(u+ri) = n(2u+(n-1)r).$$

qui se transforme en

$$\mathbf{\Sigma_{i\in n}(u+ri) = nu + 1/2\ n(n-1)r)}$$

de ce résultat le lemme 1 se déduit de manière immédiate

Annexe 3

Synopsis mathématique de la première partie de la démonstration

Expressions du système d'écriture des prédicats kantifiés au premier ordre dont la déduction suit la première partie de la démonstration du théorème principal de Lacan.

Nous déduisons des deux lemmes établis

lemme 3

(3) $\forall n[\forall\varphi\forall g(\ ((\varphi\in S_n) \wedge (g = \varphi + i)) \Leftrightarrow [\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{g}} = 2\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}}]\ )\ ]$

lemme 2

(2) $\forall n\forall f[(f \in S_n) \Rightarrow (\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{f}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}})]$

---

dont la réciproque est fausse (2) $\exists n\exists f\ [(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{f}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}}) \wedge (f\notin S_n)]$

dont nous avons donné un exemple ou encore f(0)= 0, f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 2 où 0+1+2+3 = 6 et 0+2+2+2 = 6

à partir d'une conséquence du lemme 2

(2) $\forall n[\forall\varphi\forall g(\ ((\varphi\in S_n) \wedge (g = \varphi + i)) \Rightarrow [(g\in S_n) \Rightarrow (\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{g}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}})]\ )]$

Cet énoncé s'écrit aussi en vertu de *la loi d'import export* de la coordination logique du à Peirce; dont nous rappelons l'expression

$([(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)])$

(2') $\forall n[\forall\varphi\forall g(\ ((\varphi\in S_n) \wedge (g = \varphi + i) \wedge (g\in S_n)) \Rightarrow (\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{g}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}})\ )]$

si de fait, $[\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{g}} = 2\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}}]$ et $(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{g}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}})$ équivaut à $(2\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}})$

alors (3) et (2) composés ? entre ? eux [$\Leftrightarrow$? $\Rightarrow$] donnent

(4) $\forall n[\forall\varphi\forall g(\ (\varphi\in S_n) \wedge (g = \varphi + i) \wedge (g\in S_n)\ ) \Rightarrow (2\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}})]$

dont nous retiendrons la contraposition

(5.0.) $\forall n[\forall\varphi\forall g((2\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}} \neq \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}}) \Rightarrow \neg(\ (\varphi\in S_n) \wedge (g = \varphi + i) \wedge (g\in S_n)\ ))\ ]$.

Remarque pour la suite

Il faut noter que la réciproque est fausse

(5') $\neg\forall n[(2\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}}) \Rightarrow \forall\varphi\forall g(\ (\varphi\in S_n) \wedge (g = \varphi + i) \wedge (g\in S_n)\ )]$

(5'.0.) $\exists n[(2\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}}) \wedge \exists\varphi\exists g\neg(\ (\varphi\in S_n) \wedge (g = \varphi + i) \wedge (g\in S_n)\ )]$

(5'.1.) $\exists n[(2\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}}) \wedge \exists\varphi\exists g(\neg(\ (\varphi\in S_n) \wedge (g = \varphi + i)\ ) \vee \neg(g\in S_n)\ )]$

(5'.1.) $\exists n[(2\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}}) \wedge \exists\varphi\exists g((\ (\varphi\in S_n) \wedge (g = \varphi + i)\ ) \Rightarrow (g\notin S_n)\ )]$

du fait de $(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg q)$ et qu'en effet il existe au moins des tranpositions parmi les φ qui vont produirent des fonction g non injectives.

Nous reprenons à partir de (5)

(5.1.) $\forall n[\forall\varphi\forall g((2\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}} \neq \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}}) \Rightarrow (\neg\ ((\varphi\in S_n) \wedge (g = \varphi + i)) \vee \neg\ (g\in S_n)\ ))\ ]$.

(5.2.) $\forall n[\ ((2\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}} \neq \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}}) \Rightarrow \forall\varphi\forall g\ (\ ((\varphi\in S_n) \wedge (g = \varphi + i)) \Rightarrow (g\notin S_n)\ ))\ ]$.

soit rétroactivement par *la loi d'import export* de la coordination logique

(5.3.) $\forall n[(2\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}} \neq \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}}) \Rightarrow \forall\varphi\forall g\ ((\varphi\in S_n) \Rightarrow [(g = \varphi + i) \Rightarrow (g\notin S_n)])]$

peut se transcrire en vertu des lois de la kantification dans notre expression technique de la thèse transitoire dont la déduction constitue la démonstration du théorème de Lacan

(5.4.) $\forall n[\ [(2\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}} \neq \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}}) \Rightarrow \forall\varphi((\varphi\in S_n) \Rightarrow \forall g[(g = \varphi + i) \Rightarrow (g\notin S_n)])]$.

Ici nous étudions les expressions $(2\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}} \neq \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}})$ et $(2\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}})$ en fonction de la parité de n.

fin de l'annexe 3

Annexe 4

Ajoutons deux études supplémentaire qui accompagnent la détermination de la valeur de $\boldsymbol{\Sigma_n}$ en fonction de la parité de n.

1. **Par le calcul inverse à partir de la parité de n**

Nous démontrons le résultat suivant sous l'aspect d'un dernier lemme traitant des conséquence de la parité de n.

Lemme de la parité

si $n = 2k$ alors $\boldsymbol{\Sigma_n} = k \pmod n$

si $n = 2k+1$ alors $\boldsymbol{\Sigma_n} = 0 \pmod n$

Démonstration

1. $n = 2k$ implique que $k + k = 0 \pmod n$ soit $1/2n = + k = - k \pmod n$

$\boldsymbol{\Sigma_n} = 1/2\, n(n-1)$ avec $n = 2k$

$$\boldsymbol{\Sigma_n} = \mathbf{k(2k - 1)} = 2k^2 - k = 2k^2 + k = k + k\times 2k = k + kn = k \pmod n$$

conclusion

si $n = 2k$ alors $\boldsymbol{\Sigma_n} = k \pmod n$

Nous pouvons noter dans ces conditions

$$\boldsymbol{\Sigma_n} = 1/2n + \lambda n = (\lambda+1/2)n$$
$$= k + \lambda 2k = (2\lambda+1)k$$

2. $n = 2k+1$

$\boldsymbol{\Sigma_n} = 1/2\, n(n-1)$ avec $n = 2k +1$

$$\boldsymbol{\Sigma_n} = 1/2\,(2k +1)(2k+1 - 1) = 1/2\,(2k +1)\,2k \mathbf{\,= k(2k +1)} = kn = 0$$

conclusion

si $n = 2k+1$ alors $\boldsymbol{\Sigma_n} = 0 \pmod n$

Nous pouvons noter dans ces conditions

$$\boldsymbol{\Sigma_n} = \lambda n = \lambda(2k+1) \pmod n$$

2. **Combinaisons dans le triangle arithmétique**

Reprenons par un rappel de notre premier **lemme** qui nous a conduit à établir concernant la valeur de la *somme d'indice n* donnée par l'expression $\boldsymbol{\Sigma_n} = 1/2\, n(n-1)$

Nous faisons remarquer au lecteur que cette expression est précisément celle dont traite l'analyse combinatoire en terme de nombre de combinaisons et qu'elle établit pour le nombre des combinaisons de n termes pris deux par deux notée :

$$C_n^{\,2} = 1/2\, n(n-1),$$

Cette expression permet de calculer les valeurs constituantes de la seconde colonne du triangle arithmétique de Pascal dont les lignes sont indexées par le nombre n des éléments à combiner deux par deux, les colonnes étant indexées par le degré caractéristique de ces combinaisons, ici $p = 2$.

Nous en donnons une construction partielle qui suffit ici à notre étude des nombres à partir de la troisième ligne, pour $(2 \leq n)$, car les application sur le vide et sur le singleton ne nous retiendrons pas pour l'instant ici.

colonnes		0	1	2				
lignes	0	1	0	0				
	1	1	1	0	0			
	2	1	2	$\underline{1}$	0	0		$\boldsymbol{\Sigma_2} = 1 = 1 \neq 0 \pmod 2$
	3	1	3	$\underline{3}$	1	0	0	$\boldsymbol{\Sigma_3} = 3 = 0 \pmod 3$
	4	1	4	$\underline{6}$	4	1	0	$\boldsymbol{\Sigma_4} = 6 = 2 \neq 0 \pmod 4$
	5	1	5	$\underline{10}$	10	5	1	$\boldsymbol{\Sigma_5} = 10 = 0 \pmod 5$
	6	1	6	$\underline{15}$	20	15	6	$\boldsymbol{\Sigma_6} = 15 = 3 \neq 0 \pmod 6$
	7	1	7	$\underline{21}$	35	35	21	$\boldsymbol{\Sigma_7} = 21 = 0 \pmod 7$
	8	1	8	$\underline{28}$	56	70	56	$\boldsymbol{\Sigma_8} = 28 = 4 \neq 0 \pmod 8$
	9	1	9	$\underline{36}$	84	126	84	$\boldsymbol{\Sigma_9} = 36 = 0 \pmod 9$

où se lit une alternance en fonction de n entre les nombres pairs et impairs.

Ils sont marrants ces nombres.

- Ceux des *lignes impaires* sont nuls en arithmétique en fonction de la congruence de nos cycles ceci ayant pour effet de rendre contingente l'existence de composé $(g = \varphi + i)$ qui soient des permutations mais dans d'autres cas ils sont seulement possible pouvant ne pas apparaître. Il y en a qui le sont et il y en a qui ne le sont pas.

- Ceux des lignes paires ne sont pas nuls, ils rendent impossible que des composés $(g = \varphi + i)$ soient des permutations car $\boldsymbol{\Sigma_n} \neq 0$ fera que jamais $(\boldsymbol{\Sigma_n} = 2\boldsymbol{\Sigma_n})$ ceci étant nécessaire si seulement si $\boldsymbol{\Sigma_n} \neq 0$ et que toujours $(\boldsymbol{\Sigma_n} \neq 2\boldsymbol{\Sigma_n})$ ce qui implique qu'il est alors nécessaire que $(g \notin S_n)$, soit notre théorème de Lacan enfin démontré.

les trois annexes sont achevées