

Thèses sur le ruisseau ardent

à René Lew

Cher ami,

Logique bilatère, logique unilatère. Tels sont les termes dont usent certains autour de nous, puisque nous avons commencé à en parler ensemble et qu'il est quelque chose de fondé là-dedans. Mais ceci réclame quelques précisions.

1. Les deux termes bilatère et unilatère sont en usage en théorie des surfaces topologiques. 2. En logique s'opposent le vrai et le faux, l'affirmation et la négation. 3. Un élément de surface a deux faces distinctes qui sont opposées l'une à l'autre. 4. L'opposition des deux faces distinctes s'écrit comme un couple d'éléments symétriques en algèbre (dans une structure de groupe). 5. Ceci, grâce au groupe fondamental d'un nœud de bord de surface trouée (il faut au moins un trou). 6. Le caractère unilatère, soit la connexité des faces, s'écrit dans un groupe par l'égalité d'éléments symétriques qui équivaut à l'existence d'un élément nilpotent ($x^2 = e$). 7. Pour parler en terme de surface lorsque l'on fait de la logique, il faut donc définir une structure de groupe en logique. Cette structure logique existe en logique classique, celle-ci est alors unilatère, car pour cette structure chaque élément est nilpotent. 8. Nous avons construit une logique modifiée (la topologie du sujet) qui présente une négation permettant d'écrire une situation qui est à l'opposition logique de l'affirmation et de la négation ce que sont les éléments nilpotents (surface unilatère) aux éléments non-nilpotents (surface bilatère) de l'algèbre. Ceci a pu faire croire à une logique unilatère, mais il ne s'agit pas dans ce premier temps du même type d'opposition. 9. Il nous faut alors construire en logique une autre structure de groupe où nous pourrions parler de logique bilatère à propos de l'opposition de l'algèbre (réelle) qui s'y trouverait réalisée entre les termes de l'opposition logique. 10. Cette construction est réalisée depuis le 14 février 1987. 11. Nous pouvons entreprendre maintenant la discussion du non-rapport qu'entretiennent la présence et l'absence de ces oppositions, dans les termes de l'opposition logique et de

l'opposition en algèbre lorsque nous les superposons et lorsqu'elles sont distinctes. Nous dirons cette structure écrite en algèbre être celle de «l'involution signifiante»: le torrent fougueux de la répétition freudienne. Soit le traitement «de la copule qui unit l'identique avec le différent».

Je développe maintenant l'argument de chacune de ces thèses, avec des renvois aux fascicules de résultats¹ pour plus de précisions lorsqu'elles sont nécessaires.

1. Les termes *bilatère* et *unilatère* sont des termes en usage dans la théorie des surfaces topologiques. Bilatère veut dire qui a deux faces, unilatère une seule; il s'agit d'une autre façon de dire, en parlant du nombre de faces, qu'une surface est orientable ou non-orientable. Ces deux couples (bilatère/unilatère, orientable/non-orientable) sont équivalents en tant qu'ils se correspondent exactement termes à termes.

Orientable veut dire que nous pouvons définir deux orientations différentes que nous opposerons, opposées donc et qu'il n'existe pas de déformation intrinsèque à la surface qui transforme l'une de ces orientations en l'autre. Elles sont donc bien distinctes.

Une surface est non-orientable dans le cas contraire où il n'est pas moyen d'opposer deux orientations sans que l'une ne se transforme en l'autre dans la topologie (selon une transformation continue et intrinsèque) de cette surface. (Je ne recours pas ici à l'étymologie du terme orientation, une orientation est un vecteur ou plusieurs, peu d'exotisme donc, l'orient se perd.)

2. En ce qui concerne la logique, nous nous en tiendrons ici à l'opposition entre le vrai et le faux d'une part, et l'affirmation et la négation d'une proposition d'autre part. Disons, pour commencer à introduire rigoureusement le concept de grandeur négative, qu'il s'agit ici de l'opposition logique définie de façon spécifique en tant que le vrai et le faux (l'inverse) s'opposent l'un à l'autre et que par conséquent l'affirmation et la négation ne peuvent coexister en logique classique. C'est un type d'opposition où il s'agit soit de l'un, soit de l'autre terme de cette opposition.

¹ Publiés par Topologie En Extension. Point Hors Ligne éd. (note de 1988)

Ceci s'écrit d'une thèse de la logique qui dit qu'il est faux que l'affirmation et la négation d'une proposition soient vraies en même temps:

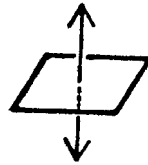
$$\neg(x \wedge \neg x)$$

Ce qui peut se lire: il est faux qu'une proposition soit à la fois vraie et fausse. Voilà ce qu'est l'opposition logique. Cette question va en fait plus loin, puisque seul le vrai s'écrit en logique (voir pour cela l'Introduction du fascicule n° 0 et la position de l'inconscient de Freud).

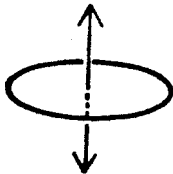
3. Quel rapport cette opposition logique entretient-elle avec les surfaces?

Un esprit simple a pu croire, surtout avant le XIXe siècle où l'on ne faisait pas beaucoup de topologie, qu'une surface a toujours deux faces, est orientable donc. Et ceci, nous le supposons du fait que quiconque peut se convaincre qu'un élément de surface, c'est-à-dire un morceau d'étoffe équivalent à un disque, a deux faces (donc est orientable) dans sa localité, ce qui veut dire en lui-même sans rien y ajouter d'autre.

Un élément de surface



équivalent à un disque



Il semble donc comme en logique qu'il y ait eu ici un type d'opposition qui se refusait à confondre les deux termes de l'opposition. D'après la dite géométrie classique, la découverte qu'il en soit autrement a surpris.

4. Fraîcheur de ceux qui considèrent qu'une surface doit avoir deux faces, de ceux qui, comme Kant, croient qu'affirmation et négation s'opposent de façon radicale. Reste pourtant une différence entre ces deux types d'oppositions. Car comment écrire l'opposition entre les faces?

Il est une façon de faire, elle consiste à écrire l'opposition des faces comme une opposition algébrique (opposition

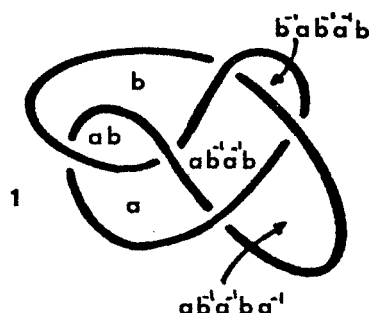
réelle dans les termes de Kant)². C'est-à-dire de formuler cette opposition en termes de structure algébrique comme sont opposés un élément et son élément symétrique dans une structure de groupe.

Si le groupe est noté par une écriture additive, il s'agira des éléments opposés en algèbre; si l'écriture est multiplicative, ces éléments seront dits inverses³. L'opposition réelle ou de l'algèbre, c'est l'opposition des éléments symétriques. Kant prend l'exemple des nombres opposés qui s'annulent pour définir cette opposition qu'il dit réelle, comme + 3 et - 3, dans son essai pour introduire en philosophie les grandeurs négatives.

5. En effet, nous pouvons thématiser les surfaces topologiques à bord à partir du groupe fondamental des nœuds de leur bord⁴. Pour les surfaces topologiques sans bord (fermées donc), il suffit d'y pratiquer un simple trou imaginable comme rupture de surface (découpe le long d'un trajet réductible dans la surface en question), ce qui est toujours possible sans altérer la structure de la surface.

Prenons une surface à deux faces pour rester dans notre intuition naïve de l'élément de surface.

Nous partons d'un exemple présenté dans *Essaim*, pp. 91 à 96.



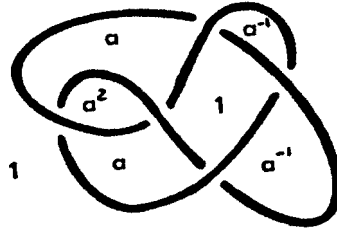
$$G = (a, b / a^{-1}bab^{-1}aba^{-1} = ba^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b)$$

<0> Nous ajoutons la relation $a = b$:

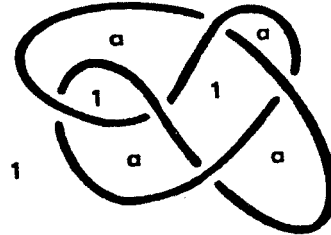
² E. Kant, *Essai pour introduire en philosophie le concept de grandeur négative*, traduction R. Kempf, Vrin, Paris, 1972.

³ Voir J.-M. Vappereau, *Essaim*, fascicule de résultats n° 1, pp. 36 à 40.

⁴ Voir J.-M. Vappereau, «Deux usages du calcul dans les champs d'existence du noeud», *Ornicar?* n° 31, p.166; *Etoffes*, fascicule de résultats n° 2, chapitre I.

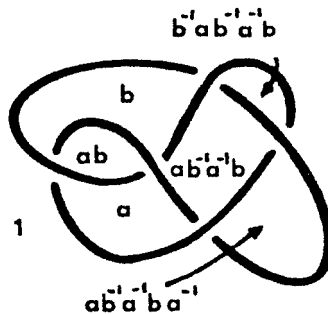


Nous ajoutons la relation $a^2 = 1$.



Attention, ceci correspond au premier algorithme, il ne s'agit pas encore du nombre de faces, mais du plein (a) et du vide (1),

<1> Posons: $ab = 1$, alors $b = a^{-1}$ dans la situation initiale

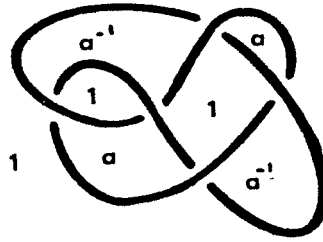


$ab^{-1}a^{-1}b$ donne $a^2a^{-2} = 1$ (en remplaçant b par a^{-1})

En remplaçant b par a^{-1} dans la relation du groupe fondamental de ce nreud, nous obtenons: $a^{-1}a^{-1}aaaa^{-1}a^{-1} = a^{-1}a^{-1}aaaa^{-1}a^{-1}$, soit $a^{-1} = a^{-1}$. La relation n'importe plus, elle a été remplacée par $b = a^{-1}$.

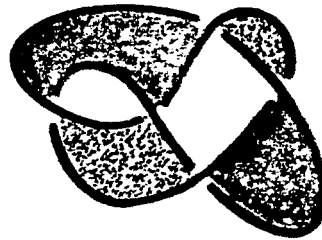
On effectue la même remplacement dans les expressions des zones:

pour la zone en haut à droite $b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b = aaaa^{-1}a^{-1} = a$;
pour la zone en bas à droite $ab^{-1}a^{-1}ba^{-1} = aaa^{-1}a^{-1}a^{-1} = a^{-1}$.



Rien n'indique que $a^{-1} = a$, la surface est donc bilatère.

Nous colorions cette surface avec deux couleurs distinctes:



Ce type de calcul peut être effectué à partir d'un quelconque nœud mis à plat.

6. Le caractère unilatère de la surface, soit la connexité des faces, s'écrit dans ce contexte par l'égalité de x et de x^{-1} (son élément inverse pour une écriture multiplicative de la structure de groupe).

Lorsque dans un groupe écrit ainsi les éléments inverses sont égaux

$$x = x^{-1},$$

nous pouvons multiplier par x les deux membres de cette égalité

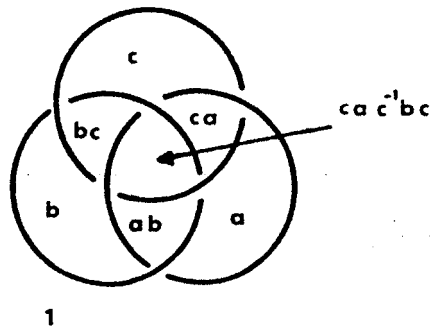
$$x.x = x.x^{-1}.$$

Ainsi d'après la définition de l'élément inverse, sa composition avec l'élément dont il est l'inverse produit l'élément neutre

$$x^{-2} = 1$$

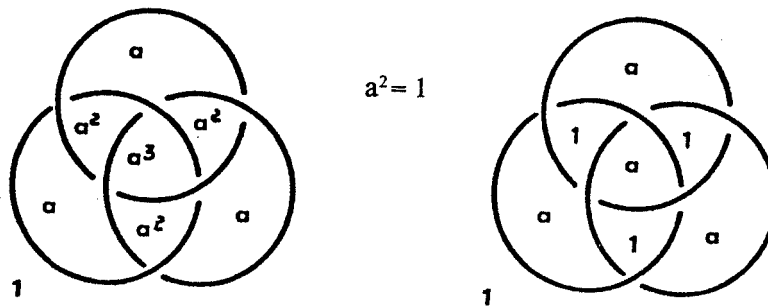
Un élément dont la répétition donne l'élément neutre est dit ni/potent. Ce type d'élément, lorsqu'il note un trajet orienté dans le groupe d'un nœud, révèle dans le quotient qui définit la surface d'empan du nœud une surface unilatère.

Donnons un exemple (à partir de Essaim, pp. 101 à 104):



$$G = (a, b, c \mid aba^{-1}ca = bcb^{-1}ab = cac^{-1}ba)$$

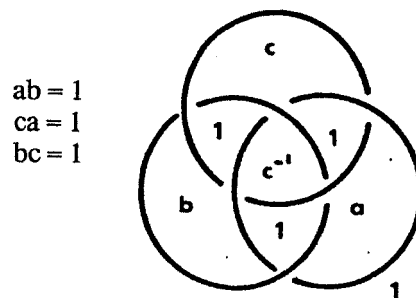
< 0 > Ce résultat nous offre l'occasion de poser la relation supplémentaire $a = b = c$. Ainsi



en ajoutant la relation $a^2 = 1$, nous obtenons une distinction entre pleins et vides, cela permet de déterminer la surface d'empan de ce nœud.

<1> Si nous posons l'égalité des zones notées 1 dans ce dernier dessin en reprenant leur expression dans la présentation initiale:

$$ab = 1 \quad ca = 1 \quad bc = 1$$



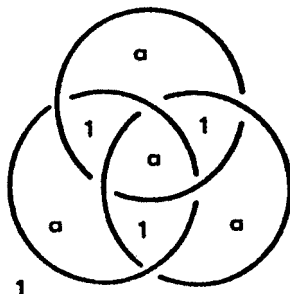
comme d'associer ces relations aux relations du groupe initial:

$$\begin{aligned} aba^{-1}ca &= a^{-1} \\ bcb^{-1}ab &= b^{-1} \\ cac^{-1}ba &= c^{-1} \end{aligned}$$

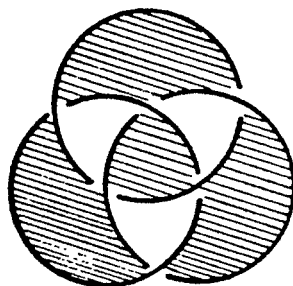
l'égalité de ces trois expressions nous confirme que

$a^{-1} = c^{-1}$, soit $c = a$, et comme $ca = 1$, soit $c = a^{-1}$,
donc $a = a^{-1}$, soit $a^2 = 1$.

Ainsi la présentation de la surface avec $a^2 = 1$ est unilatère:



Nous remplaçons la lettre a par des hachures:



7. De ce fait, pour parler de logique bilatère ou de logique unilatère, il nous faut définir en logique une structure de groupe. Ceci est constructible. Il existe deux connecteurs binaires qui produisent cette structure dans l'ensemble des propositions. Ce sont l'équivalence logique et la différence symétrique (voir Nans, fascicule de résultats n° 0).

Voici leurs tables de vérité:

	0	1
0	1	0
1	0	1

équivalence logique

.	0	1
0	0	1
1	1	0

différence symétrique

Que nous pouvons étendre en un calcul de groupe comme une table de composition à la manière de Pythagore. Pour les opérateurs unaires: la tautologie 1, la contradictoire 0,

l'affirmation X et la négation $\neg X$ d'une proposition quelconque. La différence symétrique permet de donner le tableau suivant:

	0	1	X	$\neg X$
0	0	1	X	$\neg X$
1	1	0	$\neg X$	X
X	X	$\neg X$	0	1
$\neg X$	$\neg X$	X	1	0

Où nous pouvons constater que la contradictoire «0» est l'élément neutre, soit $(X \neq 0) = X$. Et que chaque élément est son propre symétrique $(X \neq X) = 0$.

Il en est de même, de façon duale, pour l'équivalence logique prise comme loi de composition interne.

Il est à noter qu'il faut apprendre à lire sans systématiser et ne pas s'inquiéter du double usage de l'équivalence logique ici, soit comme égalité, et dont la négation sert de loi de composition interne. Ainsi, pour faciliter la lecture, proposons-nous d'écrire l'équivalence tautologique par le signe de l'égalité $=$ à la place de $\Leftrightarrow$, et sa négation par le signe de la différence symétrique, soit l'égalité rayée d'une barre $(X \neq Y)$ pour $\neg(X \Leftrightarrow Y)$. Ainsi nous pouvons réécrire ces deux expressions:

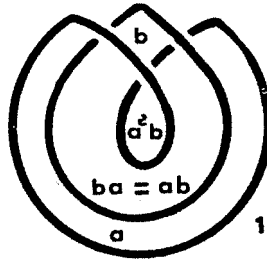
$$(X \neq 0) = X \text{ et } (X \neq X) = 0.$$

ou mieux encore, à remplacer le signe : $\neq$, qui écrit la négation de l'équivalence par le signe $+$, soit remplacer $\neq$ par $+$, nous obtenons:

$$(X + 0) = X \text{ et } (X + X) = 0,$$

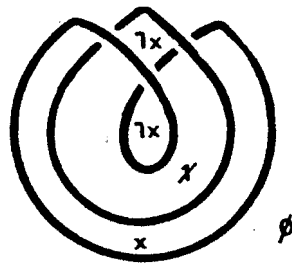
ce qui est sans importance à partir du moment où l'usage de ces éléments graphiques est bien défini par les tableaux de vérité ou de composition.

Plaçons cette structure, réalisée en logique, sur une surface issue du groupe fondamental de l'enlacement (voir Essaim, fascicule de résultats n° 1, p. 120 et 121)

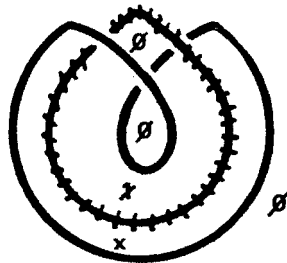


$$G = (a, b / ab = ba)$$

En proposant de substituer $\emptyset$ pour 0 à 1, X à a et $\neg X$ à b , en suivant la composition donnée par la table:

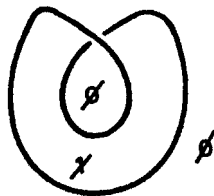


Notre groupe en logique est commutatif, il vérifie bien la relation du groupe fondamental de l'enlacement. Cette surface n'est une surface de Möbius pourvue de sa coupure (bilatère) qu'à la condition que le trou central soit vide, $\neg X = 0$.



Mais alors la coupure s'efface, car le poinçon vaut $\neg x$ aussi, il est donc vide.

De fait $X = 1$, la surface est unilatère:



Et de conclure que du point de vue de l'opposition algébrique (réelle: si nous interprétons la logique en termes de surface) la logique est unilatère.

8. Nous avons construit en logique une topologie qui contient une situation qui est à l'opposition logique l'équivalent de ce que sont les surfaces unilatères aux surfaces bilatères. C'est la logique , modifiée en topologie du sujet, pour laquelle il se peut que S et $\sim S$, soient équivalents.

$$\bar{S} = (S \Leftrightarrow \sim S)$$

Si $\bar{S}$, alors les contraires se confondent.
Si $\neg \bar{S}$, alors les contraires s'opposent.

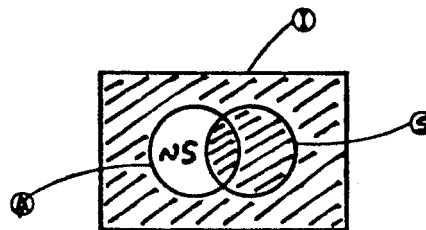
Mais cela reste distinct d'une formulation en termes de nombre de faces.

Redonnons ici les définitions de ces opérateurs logiques.

-5 est un opérateur primitif dont voici la table :

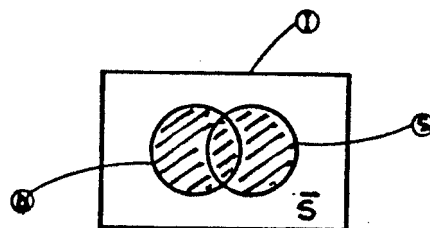
S	A	$\sim S$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

et le diagramme à la manière de Euler-Venn:



$\bar{S}$ est définie à partir de $\sim S$ comme étant aussi

$$\bar{S} = (\neg S \wedge \neg \sim S)$$

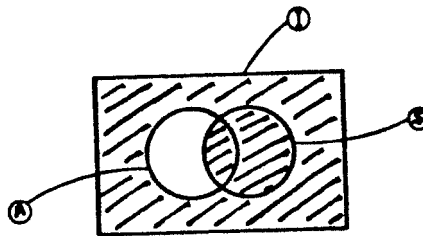


qui dit donc que ni S ni $\sim S$ ne sont vraies.

S	$\bar{A}$	$\neg S$	$\sim S$	$\neg \sim S$	$(\neg S \wedge \neg \sim S)$	$\bar{S}$
0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

L'expression du $\bar{A}$ (A barré) tient au fait que, si nous l'écrivons explicitement, le tableau qui définit $\sim S$, est celui de $(\neg S \wedge \bar{A})$:

S	$\bar{A}$	$(\neg S \wedge \bar{A})$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0



C'est seulement à barrer le A , $\bar{A}$ que ce connecteur binaire devient de ce fait d'écriture un opérateur unaire de la logique modifiée.

Il est bien évident que cette modification est de pure syntaxe, elle ne modifie rien quant à la sémantique du langage. Cette légère, différence entre A et $\bar{A}$ (A barré) est le trait premier de la topologie du sujet, par là nous faisons entrer la différence entre ce qui est énoncé et le fait de l'énoncer, ici le fait de scription, nous entrons dans la dimension de la parole par la structure du langage.

De ce fait, une proposition quelconque S de la logique modifiée $|M$ peut s'écrire comme un couple de propositions (X, Y) de la logique classique $|B$, à la manière dont les nombres complexes s'écrivent . grâce à deux nombres réels.

$$S = (X \wedge \bar{A}) \vee (Y \wedge \neg \bar{A}) \text{ où } S \in |M, X \in |B \text{ et } Y \in |B,$$

et ceci uniquement si nous considérons $\bar{A} \in |B$ comme une variable supplémentaire de la logique classique. Il y a seize opérateurs unaires de la logique modifiée, puisqu'en logique classique les opérateurs unaires sont au nombre de quatre : $16 = 4 \times 4$. Ils

sont, par exemple pour P, une variable du calcul propositionnel classique,

$$\neg P = (\neg P \wedge \mathbb{A} \vee (\emptyset \wedge \neg \mathbb{A})),$$

où la proposition X vaut $\neg P$ et la proposition Y vaut le vide $\emptyset$.

Puis

$$\sim P = (P \wedge \mathbb{A}) \vee (\emptyset \wedge \neg \mathbb{A}),$$

où X vaut P et Y le vide $\emptyset$. Donnons la liste de quelques autres opérateurs unaires de la logique modifiée dont nous pouvons déduire l'exhaustion grâce à la négation classique.

Il y a :

$$\emptyset \neg P, \neg\neg P, \bar{P} = (\emptyset \wedge \mathbb{A}) \vee (\neg P \wedge \neg \mathbb{A}), \bar{\bar{P}}$$

$$P = (P \wedge \mathbb{A}) \vee (P \wedge \neg \mathbb{A})$$

$$\neg P = (P \not\equiv \mathbb{A}) = (\neg P \wedge \mathbb{A}) \vee (P \wedge \neg \mathbb{A}) \text{ et } \mathbb{A} \text{ lui même.}$$

Ils sont au nombre de huit. La négation classique permet d'écrire les huit autres (voir Nons, fascicule de résultats n° 0).

9. Pour rapprocher ces deux types d'opposition qui restent distincts, il nous faut donc construire en logique une structure d'algèbre où nous pourrions parler de logique bilatère, puisque en logique classique nous ne trouvons que structure unilatère (un groupe dont chaque élément est nilpotent, voir thèse n° 7).

10. Ceci est chose faite depuis le 14 février 1987, ce qui te vaut, mon cher René Lew, cette lettre.

Nous pouvons définir en effet une loi de composition interne sur l'ensemble |M des énoncés de la logique modifiée, telle que S et S', définies respectivement par (X, Y) et (X', Y'), leur composé soit défini par le couple d'expressions:

$$F1 (X, Y, X', Y') = (X + Y) (X' + Y') + Y + Y',$$

et

$$F2 (X, Y, X', Y') = (X + Y) (X' + Y') + X + X' + 1$$

ou de préférence en une écriture qui rappelle le produit des nombres complexes en coordonnées cartésiennes:

$$S * S' = ([(X + Y) (X' + Y') + Y + Y'] \wedge \mathbb{A}) \\ \vee ([(X + Y) (X' + Y') + X + X' + 1] \wedge \neg \mathbb{A})$$

où le signe + désigne la différence symétrique.

Pour cette loi $\mathbb{A} = (1 \wedge \mathbb{A}) \vee (\emptyset \wedge \neg \mathbb{A})$ est élément neutre.

Il ne s'agit d'une loi de groupe que pour les énoncés de la forme

$S = (X \wedge A) \vee (X \wedge \neg A),$
soit $S = X$, c'est-à-dire pour la logique classique.

En effet dans ce cas l'élément inverse est toujours défini par l'expression:

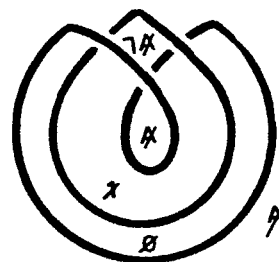
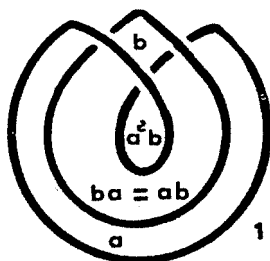
$$S = (\neg X \wedge A) \vee (\neg X \wedge \neg A) = \neg X.$$

Nous pouvons encore définir grâce à cette loi * une structure de groupe sur les constantes; elle donne le tableau suivant:

*	A	$\neg A$	$\emptyset$	I
A	A	$\neg A$	$\emptyset$	I
$\neg A$	$\neg A$	A	I	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	I	$\neg A$	A
I	I	$\emptyset$	A	$\neg A$

où nous pouvons constater que $\emptyset^{-1} = I$ et que $I^{-1} = \emptyset$.

Grâce à cette structure, la logique peut être inscrite dans les zones d'existences délimitées dans l'espace plan par une mise à plat du nœud, pourvu de la coupure qui rend bilatère sa surface d'empan. Reprenons l'exemple le plus simple présenté par la bande de Mœbius et sa coupure (se reporter à la thèse n° 7)



si nous posons $a^2b = 1 = A$, $a = \emptyset$, $b = \neg A$.

Cette logique est bilatère, et l'opposition logique du vrai et du faux coïncide avec l'opposition réelle des faces de la surface.

. 11. Nous pouvons, maintenant, sur la base de ces éléments, de ces définitions et de ces constructions, discuter le rapport et l'absence de rapport qui persistent entre les termes d'une opposition, ce que le Docteur Lacan appelle «involution signifiante» (Séminaire de La logique du fantasme, leçon du 15

février 1967). C'est-à-dire <da copule qui unit l'identique avec le différent».

Résumons la situation. Nous devons distinguer deux sortes d'oppositions: l'opposition logique, l'opposition réelle (de l'algèbre) pour reprendre les qualificatifs de Kant. Nous avons construit une logique modifiée où cette première opposition logique peut être affirmée ou être effacée contrairement à toute imagination classique. La bande de Mœbius, parmi les surfaces non-orientables, nous offre un exemple de la présence et de l'absence de l'opposition de l'algèbre, surprenant l'imagination idéalement reçue. La coupure spécifique de la bande de Mœbius contrôle cette pulsation. Nous avons construit maintenant en logique le moyen de superposer ces deux types d'oppositions, ceci en prolongeant la logique en une construction de l'algèbre. Il y a donc quatre termes à considérer: l'opposition logique avec ou sans opposition, l'opposition de l'algèbre avec ou sans opposition. Puis une distinction, leur superposition ou leur différence. Il faut tenir compte de cette dernière opposition dans nos raisonnements, c'est l'enjeu de notre débat dans ce temps préalable.

Nous nous intéressons à l'opposition logique; l'opposition de l'algèbre représentée par la bande de Mœbius, comme son jeu représenté par $\sim$ a fonction de la coupure, ne sont là qu'en vue de la présentation du problème, disons un appui imaginable et didactique pour qui n'est pas mathématicien (écriture de pur mathème). Mais nous portons par notre technique cette représentation à la hauteur d'une écriture, elle-même mathématique donc. Reste que la discussion traite de l'opposition logique en tant que cas extrême de la différence nécessaire qui peut être définie entre deux termes quelconques.

Ceci afin de rendre compte de la structure du langage, spécialement selon son versant métaphorique, jusques et y compris la condition psychanalytique soit la structure du refoulement. Le rapport entre les E et Cs est en jeu dans cette logique d'opposition, puisqu'il nous faut rendre compte de l' E et qu'il n'est pas le nonconscient de la logique classique (voir Nons, fascicule de résultats n° 0; cette question essentielle y est discutée dès l'Introduction). Donnons maintenant une nouvelle construction de la même façon que la précédente qui embrasse notre problème dans son ensemble. Où nous pouvons suivre l'opposition logique comme une opposition réelle et s'en distinguant, afin de faire voir la fonction de la coupure dite interprétative.

Il s'agit de la loi de composition interne à l'ensemble des propositions écrites en logique modifiée: la topologie du sujet enfin articulable.

Pour

$$S = (X \wedge A) \vee (Y \wedge \neg A) \text{ et } S' = (X' \wedge A) \vee (Y' \wedge \neg A)$$

sachant que X, Y, X', Y' sont des propositions quelconques et très classiques en logique, la composition des deux propositions S et S' s'écrit:

$$S \langle \rangle S' = [X + Y + X' + Y' + YY' + I] \wedge A \vee [Y + Y' + I] \wedge \neg A$$

L'effet de ce mode de composition sur les constantes de la logique donne le tableau suivant:

$\langle \rangle$	$\neg A$	I	$\emptyset$	A
$\neg A$	$\neg A$	I	$\emptyset$	A
I	I	$\neg A$	A	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	A	I	$\neg A$
A	A	$\emptyset$	$\neg A$	I

où nous voyons que l'élément $\neg A$ est neutre. Ceci se vérifie par le calcul :

$$S \langle \rangle \neg A = \neg A \langle \rangle S = [X + Y + \emptyset + I + (YI) + I] \wedge A \vee [Y + I + I] \wedge \neg A$$

soit

$$S \langle \rangle \neg A = \neg A \langle \rangle S = ([X] \wedge A) \vee ([Y] \wedge \neg A) = S$$

pour une proposition S quelconque.

La forme univoque de l'élément symétrique d'un élément S quelconque est donnée par la formule:

$$S^{-1} = [X + Y + I] \wedge A \vee (Y \wedge \neg A)$$

celle-ci étant la solution des équations:

$$S \langle \rangle X = X \langle \rangle S = A$$

Analysons cette situation, puisqu'ici commence la discussion et l'emploi de ce qui précède.

A ne nous occuper, par exemple, que des fonctions propositionnelles à une seule variable (elles sont au nombre de seize (2 puissance 4), tu peux pour cela te reporter à la thèse n°

8), nous les regroupons selon leur mode d'opposition.

1) Il y a celles qui présentent une fonction $Y = I$, elles sont telles que $S^{-1} = S$, soit nilpotentes. Il y a quatre cas selon que la fonction X est de la forme $\emptyset$, P , $\neg P$ ou I . Ce sont donc:

$$\neg A, \neg\neg P, \neg\neg\neg P \text{ et } I,$$

P étant une variable, soit une proposition classique de la logique.

2) Les douze autres fonctions unaires se distinguent de leur élément symétrique; nous pouvons les présenter par couples dont les termes sont symétriques précisément.

a) Il y a d'abord les deux constantes

$$\emptyset \text{ et } A$$

puis les deux fonctions qui impliquent A

$$\neg P \text{ et } \neg\neg P.$$

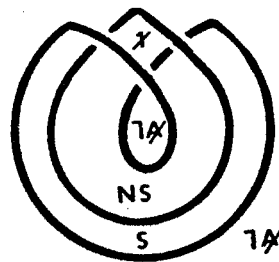
Celles-ci ont la caractéristique de présenter une fonction $Y = \emptyset$, elles sont telles que $S^{-1} = \neg S$.

b) Enfin nous regroupons les huit dernières expressions deux par deux:

$$P \text{ et } \neg\neg P, \text{ comme } \neg P \text{ et } \neg\neg P, \\ \text{ainsi } \neg P \text{ et } \neg\neg P, \text{ enfin } \neg\neg P \text{ et } P.$$

Plaçons sur une bande de Möbius séparée par sa coupure, afin d'étudier la négation modifiée dans ses relations avec la négation classique, les quatre éléments qui impliquent de manière nécessaire A : ceux pour lesquels $S^{-1} = \neg S$. C'est dire que l'opposition de l'algèbre coïncide pour ces éléments avec l'opposition modifiée de la logique.

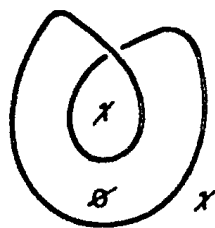
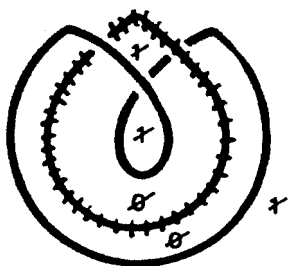
$$S \Rightarrow A$$



$$S \in \{\emptyset, A, \neg P, \neg\neg P\}$$

Que peut-il se passer dans cette situation?

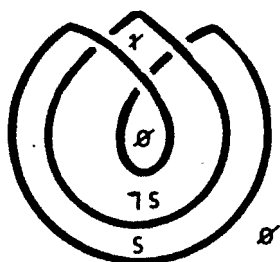
1) Soit $\neg A = I$, et nous retrouvons la logique classique avec le groupe bien connu dont la composition est définie par l'équivalence tautologique: la coupure s'efface.



$S = \sim S$ dans ce cas où la négation classique reprend ses droits d'opposition logique et se distingue de l'opposition de l'algèbre.

Mais du même coup $S = S^{-1}$, nous sommes en présence d'une logique unilatère.

2) Soit $A = \emptyset$ et nous nous trouvons dans une curieuse logique, où il est sensible qu'il y a deux sortes d'éléments vides g , avec une structure de pseudo-groupe, c'est en fait la trace de la logique modifiée qui ne cesse de ne pas s'immerger dans la logique de Boole proprement dite. La coupure se maintient comme dans le cas construit précédemment (se reporter à la thèse n° 10).



L'opposition logique classique reprend ses droits pour continuer à coïncider avec l'opposition de l'algèbre.

Il est bien entendu que s'ouvre ici un champ d'investigation plus large que ce dont nous venons de traiter dans cette dernière thèse, et qu'à la lecture de la leçon du séminaire du 15 février 1967 du Docteur Lacan, nous pouvons maintenant articuler en raison cette structure répétitive à celle de l'aliénation et de la séparation. Je t'invite à t'essayer à de tels exercices, comme ceux qui nous entourent, comme moi-même je m'y plie.

Avec ma pensée amicale, à bientôt,

Jean-Michel VAPPEREAU 1987

paru dans *Cahiers de lecture freudienne* n°14