

Théorie du nœud

première partie

Jean Michel Vappereau
Paris 1997, Bs. As. 2006

Théorie des non-nœuds

La théorie des non-nœuds est très simple, classique, elle donne lieu à une classification des plus rudimentaire, chaque objet peut être rangé dans une classe, un idéal pour la science classique, liste, énumération, retour à la taxinomie¹.

La classification repose sur le calcul d'un invariant, la répartition des nombres d'enlacement entre les ronds des couples de composants de ces chaînes qui ne sont pas des nœuds, les non-nœuds. Les non-nœuds sont les classes d'équivalence définie par cette théorie.

a₁ - Calcul sur la figure même du nombre d'enlacement global

Il faut définir au préalable la combinaison des orientations possibles des ronds qui permettent de chiffrer les croisements par leur caractéristique propre à chaque orientation globale des ronds.

0. Orientations des composants d'une chaîne

Donnons l'exemple d'une combinaison d'orientations des ronds dans le cas d'une chaîne prise comme exemple, elle est notée C et faite de deux ronds.



Fig. 1a

Nous orientons successivement ses deux composants.



Fig. 1b et c

L'effet de ce choix sur chaque croisement de l'objet va permettre de le chiffrer, grâce au couple des valeurs +1 et -1. Cela se fait selon un choix préalable qui n'a aucun sens privilégié comme en tout système d'opposition

¹ Cela fait symptôme dans la psychanalyse ou Saint Thome si vous préférez.

structurale (instance du phonème qui se retrouve réparti selon le versant du signifiant ou celui de la lettre d'après Lacan).

Ainsi nous pouvons définir la caractéristique des croisements.

1. Caractéristique des croisements

Il y a deux orientations ou caractéristiques des croisements, notées respectivement +1 et -1.



Fig. 2a

Ceci donne le chiffrage suivant sur la figure de notre exemple.

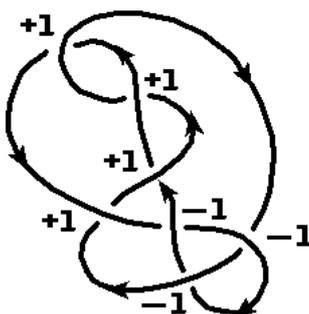


Fig.2b

Nous avons défini [Nœud, TEE, 1997 Paris] un protocole de coloriage des surfaces associée à ces nœuds et ces chaînes qui permet de déterminer ce chiffrage de la caractéristique de chaque croisement et une autre orientation : la torsion.

2. Différence des croisements propres et impropres

Il faut souligner qu'il existe deux types de croisements selon qu'il s'agit du croisement de deux composant de ficelle localisables dans le trajet de deux ronds distincts : croisement impropre, ou du même ronds : croisement propre.

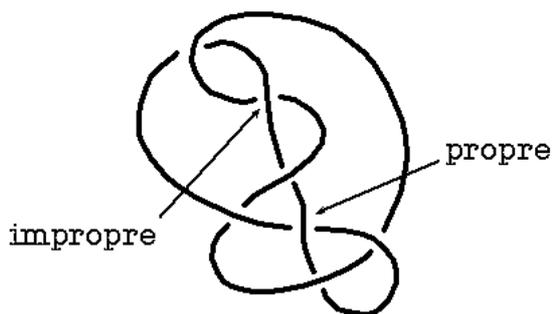


Fig.3

Dans le calcul du nombre d'enlacement, dit aussi : nombre de chaîne, seul les valeurs de la caractéristique des croisements impropres sont pris en compte.

3. Calcul du nombre de Chaîne sur la figure même

Nos objets, comme dans notre premier exemple C (Fig. 1a), sont constitués de un ou plusieurs exemplaires de ronds de ficelle plongés (notion d'injection en algèbre des fonctions), c'est dire qu'ils ne présentent pas de points multiples, dans l'espace où ils sont disposés.

Ainsi nous pouvons parcourir leur trajet sans singularité dans les dispositions multiples (voir plus loin mouvements de Reidemeister) qu'ils peuvent prendre dans l'espace du plongement.

Définition

Nous appellerons nombre de chaîne d'un objet X et nous noterons ce nombre : $ch(X)$, la demi somme des valeurs caractéristiques des croisements impropres de X.

Si nous ne tenons pas compte du chiffre du seul croisement propre de notre exemple,

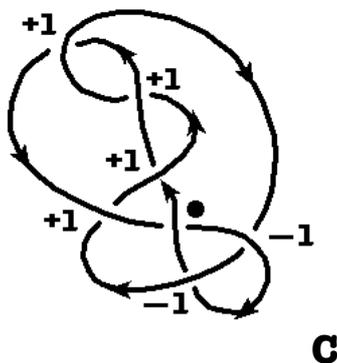


Fig.4

les résultats, de ce chiffrage et du calcul qu'il permet, nous fournissent le nombre de chaîne de l'objet C.

Calcul de la demie somme des chiffres de la caractéristique des croisements impropres,

$$ch(C) = \frac{1}{2} (+4 - 2) = +1$$

cet exemple présente un enlacement dont le nombre de chaîne est +1 pour l'orientation choisit.

Premier résultat bien connu depuis la fin du XIX^{ème} siècle (P.G.Tait et C.N.Little, voir Nœud pag. 11).

Nous commenterons ce résultat tout le long de cet exposé de la théorie des non-nœuds et il prendra son sens si ce n'est ss portée à la fin.

a₂ - De la répartition des nombres d'enlacement d'entre les couple de ronds

Une erreur assez courante, consiste à croire que ce nombre d'enlacement globale suffit à caractériser une chaîne. Cette erreur montre la désinvolture de la littérature dans ce domaine, celle-ci s'explique par le peut d'intérêt pour un esprit prompt à s'amuser avec cette étape de la théorie du nœud qui est d'ailleurs de ce fait considérée comme une théorie des nœuds comme si il y en avait plusieurs. La seule multiplicité infinie des objets est le produit de la réitération du nœud qui peut s'accumuler toujours le même, comme si on parler de la théorie des cercles pour la géométrie euclidienne antique et surtout classique avec la trigonométrie par exemple. il n'y a qu'un cercle trigonométrique.

Il nous faut donc prendre en compte la répartition des nombres d'enlacements d'entre les couples de ronds qui rentre dans le nombre de chaîne global., souvent le seul reconnu. Notre exemple ne comptait que deux ronds ce qui permet d'entretenir cette équivoque un moment.

3. Premier résultat original présenté sous l'aspect d'un répartitoire

Nous notons d'un couple de lettres XY muni d'un signe positif ou négatif les nombres d'enlacement relatifs aux couples de ronds: X et Y, quelques soient ce nombre d'enlacements effectifs.

Nous notons grâce à une écriture ensembliste $\Sigma_{\{T,U,V\}}$ les sommes globales des $\pm XY$ pour chaque changement d'orientation des ronds T, U, V par rapport à une orientation initiale de la chaîne notée Σ_{\emptyset} donnée comme première ligne du tableau.

Nous ne comptons pas une seconde fois les répartitions d'orientations complémentaires, au sens ensembliste, car elles fournissent particulièrement et globalement le même résultats puis que un changement d'orientation des deux éléments de ronds à la hauteur d'un même croisement retrouve le même signe.

Cas de un à trois ronds

Il y a deux cas possibles de tableau des répartitions quand au signes des $\pm XY$

$$\begin{array}{lcl}
 \Sigma_{\emptyset} = & +AB & +AC & +BC & \Sigma_{\emptyset} = & -AB & -AC & -BC \\
 \Sigma_{\{A\}} = & -AB & -AC & +BC & \Sigma_{\{A\}} = & +AB & +AC & -BC \\
 \Sigma_{\{B\}} = & -AB & +AC & -BC & \Sigma_{\{B\}} = & +AB & -AC & +BC \\
 \Sigma_{\{C\}} = & +AB & -AC & -BC & \Sigma_{\{C\}} = & -AB & +AC & +BC
 \end{array}$$

le tableau contenant toute les orientations positives et celui de toutes les orientations négatives. Cette présentation s'accompagne d'un théorème qui justifie notre intérêt pour les cas de un à trois ronds. Il y a une coupure structurale entre trois et quatre ronds dans l'espace qui n'est pas seulement liée à la représentation comme pourrait le faire croire la théorie des surfaces topologiques intrinsèques, mais ici coupure produite par une raison combinatoire.

Théorème

Dans le cas des chaînes de deux et trois ronds il n'y a que deux cas de tableau des répartitions des nombres d'enlacements d'entre les couples de ronds.

Démonstration

Il suffit de constater que toutes les répartitions des signes positif ou négatif se trouvent présents dans ces deux tableaux.

$$+++ , \quad --- , \quad -++ , \quad +-+ , \quad +-+ , \quad -+- , \quad ++- , \quad --+ .$$

n.t.e.d.

Pour ceux qui voudraient encore s'en persuader, indiquons leur qu'il s'agit de l'ensemble des applications d'un ensemble de trois places dans un

ensemble de deux valeurs, soit les $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{+, -\}$ forment un ensemble dont le cardinal vaut $2^3 = 8$. Ce nombre correspond au nombre de lignes de nos deux tableaux réunis.

Ainsi, si la ligne initiale d'un tableau de répartition des $\pm XY$ contient des signes différents, la procédure des changement d'orientations pertinentes, ronds par ronds dans ce cas, nous conduit à retrouver l'un des deux tableaux précédent simplement troublé dans l'ordre de ses lignes.

Donnons un exemple.

$$\begin{aligned}\Sigma_{\emptyset} &= & -AB & +AC & -BC \\ \Sigma_{\{A\}} &= & +AB & -AC & -BC \\ \Sigma_{\{B\}} &= & +AB & +AC & +BC \\ \Sigma_{\{C\}} &= & -AB & -AC & +BC\end{aligned}$$

A partir des nombres de chaîne globale, notés : Σ_T , calculés sur la figure pour les différentes orientations indexées par l'ensemble T des ronds dont l'orientation diffère de l'orientation initial \emptyset nous pouvons retrouver par le calcul le nombre de chaîne de chaque couple dans cette orientation initiale choisie, par à la formule suivante.

Pour une 3-chaîne dont les ronds sont labellisés par X, Y et Z.

$$\mathbf{ch}(XY) = \frac{1}{4} [(\Sigma_{\emptyset} + \Sigma_{\{Z\}}) - (\Sigma_{\{X\}} + \Sigma_{\{Y\}})]$$

Cette formule est un complément assez précieux à notre algorithme de lecture des nœuds et des chaînes par les colorriages [voir J.M. Vappereau Nœud, fascicule de résultat n°3, T.E.E., 1997 Paris].

Deux

Si il n'y a que deux ronds, le répartitoire se résume à un seul chiffre identique au nombre d'enlacement global. Le répartitoire se résume à

$$\Sigma = \mathbf{ch}(C).$$

Il a deux chaînes possible pour chaque nombre entier, le cas positif et le cas négatif.

Un

Si il n'y a qu'un rond, dans les cas d'un noud propre, la réduction du répartitoire est encore plus forte, puisqu'elle se résume au chiffre zéro

$$\Sigma = 0.$$

Cas de quatre ronds et plus

A partir de quatre ronds, il y a des cas qui ne présentent aucune répartition homogène des signes caractéristiques d'enlacements.

Ceci peut se démontrer en suivant le même type de raisonnement que celui employer pour démontrer la propriété inverse à trois ronds. Il suffit de compter par un petit calcul combinatoire combien sont les répartitions des signes $2^6 = 64$ et combien de lignes constituent un tableau de la répartition des enlacements orientés entre quatre ronds, soit 8 lignes.

Pour permettre au lecteur de suivre ce raisonnement donnons un tableau présentant une ligne homogène de nombre de chaîne tous positifs.

Σ_{\emptyset}	+AB	+AC	+AD	+BC	+BD	+CD
$\Sigma_{\{A\}}$	-AB	-AC	-AD	+BC	+BD	+CD
$\Sigma_{\{B\}}$	-AB	+AC	+AD	-BC	-BD	+CD
$\Sigma_{\{C\}}$	+AB	-AC	+AD	-BC	+BD	-CD
$\Sigma_{\{D\}}$	+AB	+AC	-AD	+BC	-BD	-CD
$\Sigma_{\{A,B\}}$	+AB	-AC	-AD	-BC	-BD	+CD
$\Sigma_{\{A,C\}}$	-AB	+AC	-AD	-BC	+BD	-CD
$\Sigma_{\{A,D\}}$	-AB	-AC	+AD	+BC	-BD	-CD

Comme toujours nous ne comptons pas deux fois les orientations complémentaires, au sens ensembliste, entre elles qui donnent le même résultat par inversion globale de tous les ronds (propriété à rapprocher de la qualité des croisement propres (indication à reprendre plus tard).

Donnons un exemple d'un tel objet des plus rudimentaire.



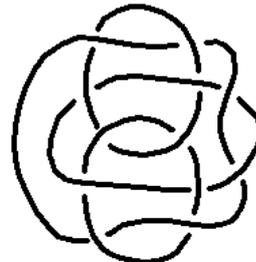
non nœud alterné

Fig. 5a

Donnons aussi un exemple de deux présentations d'une 4-chaîne irréductible à ce cas alterné et à sont inverse.



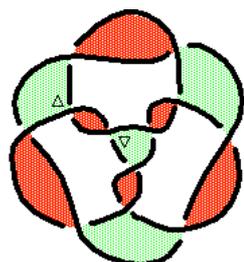
non alternée sans coupure



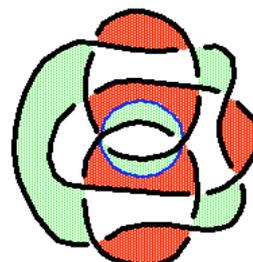
alternée avec coupure

Fig. 5b et c

Les mêmes avec nos coloriations qui distingue non-nœud (sans coupure) de nœud (avec coupure)



non alternée sans coupure



alternée avec coupure

Ainsi il y a $2^6 / 8 = 64/8 = 8$ tableau des répartitions possible de nombre de chaîne d'entre les couples de ronds d'une 4-chaîne.

Théorème

Il y a 8 cas de 4-chaîne non-nœud, différents à mouvement de Reidemeister et mouvement nœud.

Ceci signifie qu'il y a huit classes d'équivalences distinctes même si nous pratiquons non seulement les changements de présentation souples en suivant les mouvements de Reidemeister mais aussi le mouvement nœud.

C'est cette façon de faire et le point de vue d'une géométrie au sens de Félix Klein que nous devons expliquer maintenant pour achever la présentation de la théorie des non-nœuds qui va conditionner la théorie du nœud que nous proposerons de manière contrastée par la suite.

a₃ - La géométrie des non nœuds

il s'agit d'une géométrie au sens de F. Klein, une catégorie dit-on aujourd'hui. Elle est définie par deux données et une conséquence.

0. Multiplicité des objets

Tout plongement de un ou plusieurs cercles. Nous entendons par plongement les projections injectives, sans singularité d'immersions, sans points multiples en fait, dans l'image des cercles ainsi bien distingués les uns des autres autant que ne formant pas graphe en eux même pas plus.

1. Transformations permises

Les mouvements de Reidemeister bien connu.

s et notés B_1 , M_2 et T_3 . pour Boucle d'un croisement, Maille fait de deux et Triskel de trois.

+ le mouvement nœud (dit aussi *Unknoting mouvement*) N_3 .

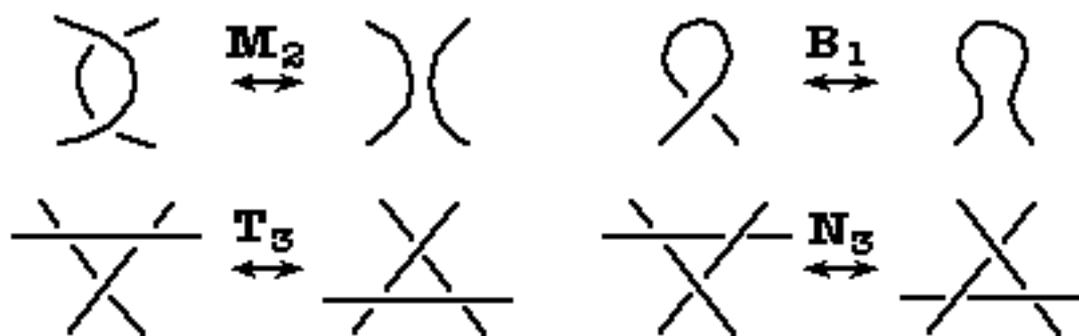


Fig. 6

C'est grâce à ce mouvement que nous pouvons expliquer que la chaîne choisie comme premier exemple est identique dans la géométrie des non-nœuds à l'enlacement simple dont elle possède le même invariant.

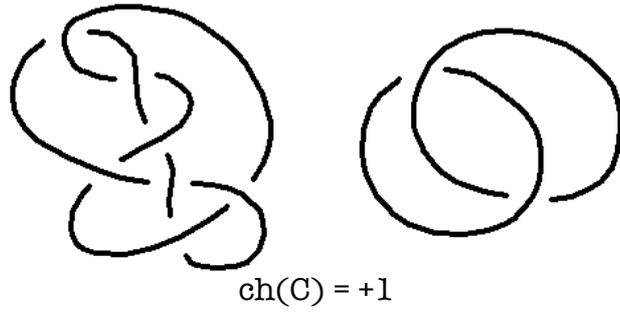
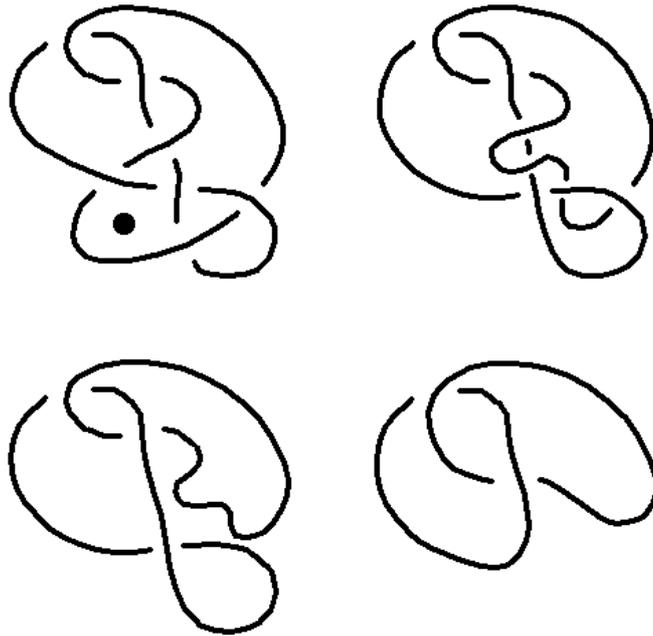


Fig. 7a et b

Montrons comment le mouvement nœud permet d'identifier notre premier exemple à un enlacement simple.



la série **N₃**, **2×M₂**, **B₁**.

Fig. 7c à f

De la même manière, dans cette géométrie des non-nœuds, nous pouvons montrer l'équivalence qui vaut identité, des deux objets des Fig. 5 b et 5 c.

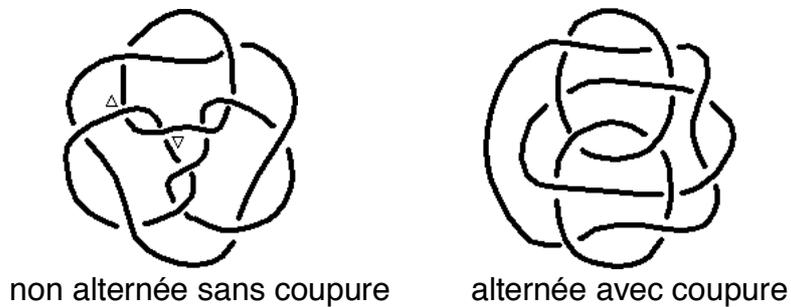
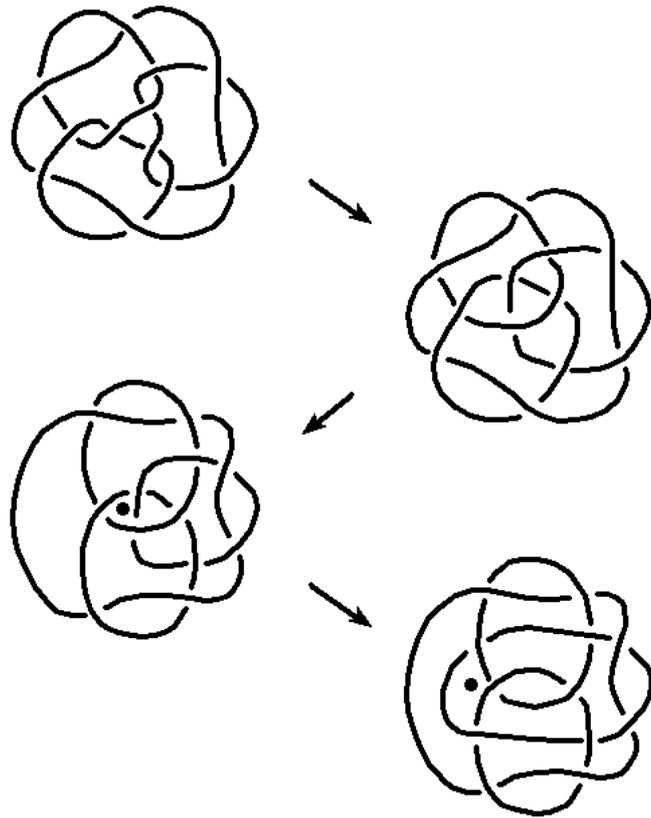


Fig. 5b à c



la série **T₃, O₀, N₃**.

Fig. 8a à d

2. Invariance de la répartition du nombre d'enlacement.

Les invariants les plus sûrs sont :

- le nombre de ronds
- la répartition des nombres de chaîne d'entre les couples de ronds.

Il s'agit de la construction du répartitoire que nous venons de présenter qui reste invariante au travers des transformations permises. Cette invariant révèle un rupture entre les chaînes de trois et de quatre ronds.

Pour conclure nous pouvons bien dire que les ronds sont homogènes et égaux entre eux mais que l'espace dans son injustice légendaire est bien inégalitaire puis qu'il ne supporte pas plus que le trois, il ne supporte pas le quatre et plus. L'espace discrimine à partir de quatre, ce qui justifie que nous luttons contre son injustice pour transformer cet état de fait par la politique.

a₄ - **Résultat de la classification de un à trois ronds**

Voir le tableau de cette théorie classifiant dans la planche hors texte qui vient à la fin de cette première partie.

Classification de un à trois ronds

Planche hors texte

Non-nœuds de un à trois ronds contenus dans un nœud ou une chaîne

Un - Commençons par les nœuds constitués d'un seul rond. Il n'y a qu'un seul non-nœud, c'est le nœud trivial :



Deux - Dans le cas des chaînes faites de deux ronds, à part la chaîne triviale :



La série des non-nœuds toriques de torsion positive :



Trois - Dans le cas des chaînes faites de trois ronds, à part la chaîne triviale et les enlacements précédents accompagnés d'un rond libre, les non-nœuds sont constitués par les chaînettes alternées de torsion positive faites de trois ronds :



avec $m \geq 1$

avec $m \geq 1$ et $n \geq 1$

et les deux séries des chaînes olympiques inverses l'une de l'autre, dont nous donnons les premiers exemplaires. Ces deux séries différentes se résument dans les figures suivantes indexées par trois nombres entiers :



avec $m \geq 1$, $n \geq 1$ et $p \geq 1$.

Nous avons fixé ici la présentation prototypique représentant chaque non-nœud de notre théorie sous l'aspect d'un non-nœud standard. Nous obtenons bien tous les types modulo R_0 et R_g .

J.M. Vappereau mars 2002